Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

ПОЛИНОМИАЛЬНОСТЬ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА НАДЕЖНЫХ СЕТЕЙ

Рассматривается задача синтеза сетей при условии, что между двумя вершинами в проектируемой сети существует хотя бы один путь, соединяющий произвольную пару ее узлов, после удаления из нее ребер подграфа, изоморфного к заданному графу. Показано, что в случаях, когда последний граф имеет простую структуру, верхняя и нижняя оценки по функционалу могут быть определены за полиномиальное время.

Пусть заданы неориентированные графы

$$G=(V,E) \text{ и } H=(V(H),E(H)),$$

множество терминальных вершин или узлов $N \subseteq V$, неотрицательные веса c_e для всех ребер e из E. Подграф G_0 графа G определен подмножеством $E_0 \subseteq E$, если $E(G_0)=E_0$ и множество вершин $V(G_0)$ содержит конечные вершины всех ребер из E_0. Вес произвольного подграфа G_0 определяется как сумма весов его ребер.

Общая задача синтеза надежных сетей (ОЗСС) состоит в нахождении подграфа $G_*=(V_*,E_*)$ (определенный с $E_* \subseteq E$) с минимальным весом такого, что после удаления ребер любого подграфа Γ из графа G, изоморфного заданному графу H, в подграфе $G_*=(V_*,E_*)$ существует хотя бы один путь, соединяющий произвольную пару узлов из N.

Следует отметить, что та же задача при дополнительном условии удаления вершин подграфа Γ, изоморфного заданному графу H, известными способами сводится к исходной задаче. В результате этой операции увеличивается только размер задачи. Поэтому здесь не рассматриваем условия существования пути между всеми парами узлов сети при удалении вершины подграфа Γ. В ОЗСС предполагаем, что G – конечный, связный граф. Другими словами, множества V и E содержат конечное число элементов. При этом граф H может быть задан с помощью множеств $V(H)$ и $E(H)$, количество элементов в которых конечно. Поэтому для ОЗСС имеет смысл рассматривать граф H с конечными множествами его вершин и ребер. В некоторых случаях множества $V(H)$ и $E(H)$ не задаются в явном виде, но известно, что граф H может быть произвольным графом с выделенной структурой. В этом случае ясно, что должны выполняться условия $|V(H)| \leq |V|$. Например, допустим, что H – связный простой граф без циклов с двумя висячими вершинами, т.е. граф H является простым путем. Отсюда следует число ребер графа H не больше, чем $|V|-1$. Отметим, что если H – тривиальный граф, то ОЗСС и задача Штейнера на графах эквивалентны. Другой вырожденный случай ОЗСС соответствует тому, что в графе G не существуют ни одного подграфа, изоморфного H. Вырожденные случаи ОЗСС также возникают на практике. Так как в дальнейшем будем рассматривать только невырожденные случаи ОЗСС, здесь рассмотрим одну задачу из молекулярной биологии, которая сводится к вырожденному случаю ОЗСС.

В работе [1] сформулирована следующая задача о возможных соединениях в допустимых конфигурациях химических компонентов генов. Если такими компонентами являются трехмерные молекулы, то они могут быть соединены вместе в соответствии с определенной структурой. Это объединение может быть представлено в трехмерном пространстве, если каждой молекуле поставлена в соответствие некоторая вершина, и вершины соединены прямыми линиями при наличии связи между соответствующими молекулами. Возникает вопрос: можно ли расположить молекулы на одной и той же прямой линии так, чтобы они сохранили прежние связи? Каждая молекула представляется при этом отрезком прямой. Если пара молекул связана, то соответствующие им отрезки взаимно перекрываются. Таким образом, задача состоит в нахождении условий, при которых граф связей можно представить с помощью пересекающихся определенным образом отрезков одной прямой линии, т.е. необходимо так сопоставить отрезки с вершинами, чтобы два отрезка пересекались тогда и только тогда, когда они соответствуют смежным вершинам. Граф, который может быть представлен таким образом, называется графом отрезков.

В работе [1] показано, что если граф не содержит ни одного подграфа, изоморфного одному из пяти графов, представленных в [1], то он может быть изображен с помощью отрезков на линии. Таким образом, получаем, что если решения ОЗСС на графе G для всех указанных в [1] типов графа H являются деревьями Штейнера, то G можно представить с помощью отрезков на линии. Легко понять, что задача Штейнера с множеством основных вершин N и с множеством вершин Штейнера $V \setminus N$ имеет решение на графе G тогда и только тогда, когда G содержит связный подграф, множества вершин которого содержит N. Таким образом, когда H – тривиальный граф, имеем достаточное и необходимое условие существования решения ОЗСС. Для общего случая условия существования решения ОЗСС также можно сформулировать, однако проверка их выполнимости не так проста. Для этого рассмотрим задачу о допустимости: содержит ли данный граф G подграф G_0, в котором существует хотя бы один путь, соединяющий произвольную пару узлов из N при удалении из G ребра любого подграфа Γ графа G, изоморфного заданному графу H.

Утверждение 1. Задача о допустимости имеет решение тогда и только тогда, когда множество ребер произвольного подграфа G_1 графа G, изоморфного H, не образует разрез в графе G.

По утверждению 1 задача о допустимости сводится к задаче изоморфизма подграфу. Для этого надо найти в G некоторый подграф G_1. Если ребра G_1 образуют разрез, то задача о допустимости не имеет решения. В противном случае все вершины G_1 стягиваются в один узел, и в полученном графе находим подграф, изоморфный графу H, и т. д.

После удаления из G ребер подграфа G_1 (найденного на некотором этапе), если G распадается на несколько компонентов связности, то задача о допустимости не имеет решения и в этом случае ясно, что характеристический вектор подграфа G_1 не удовлетворяет разрезному неравенству. Учитывая, что для заданного вектора задача выполнимости разрезных неравенств принадлежит к классу P, во многих задачах синтеза сетей эти неравенства используются для уменьшения разрыва двойственности [2, 3].

Математическая модель ОЗСС имеет следующий вид [2]:

$$\min \sum_{e\in E} c_e x_e \tag{1}$$

$$\sum_{j\in\delta(\Gamma(i))} x_{ij}^r - \sum_{j\in\delta(\Gamma(i))} x_{ji}^r = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i=0,\\ 0, & \text{при} \quad i\neq 0, r,\ i\in V,\ ,r\in N_0, \Gamma\in\Omega,\\ -1, & \text{при} \quad i=r, \end{cases} \tag{2}$$

$$0\le x_{ij}^r \le x_e,\quad r\in N_0,\quad e=(i,j)\in E, \tag{3}$$

$$x_e = 0\vee 1,\quad e\in E, \tag{4}$$

где $N_0 = N\setminus\{0\}$; $\delta(\Gamma(i))$ – множество ребер, соединяющих вершину i с остальными вершинами на графе, который получается после удаления всех ребер Γ из графа G; Ω –множество изоморфных H подграфов графа G.

Ограничения (2), написанные для всех Γ из Ω, избыточны в том смысле, что можно определить некоторое минимальное по включению подмножество Ω_0 подграфов из Ω, такое, что при замене условия Γ из Ω на Γ из Ω_0 в ограничениях (2) решение ОЗСС не будет меняться. Число $|\Omega_0|$ назовем точным числом ограничений (2).

Утверждение 2. Задача определения $|\Omega_0|$ является NP-полной.

Доказательство. Рассмотрим задачу Штейнера на графе G с множеством основных вершин N и вершин Штейнера $V\setminus N$. Допустим, что T_* – оптимальное решение этой задачи или, как часто называют, T_* – оптимальное дерево Штейнера. Рассмотрим ОЗСС для графа H, где $E(H)=\{g\}$ и g – некоторое фиксированное ребро графа G. Допустим, что g не является ребром дерева T_*. Тогда ОЗСС на графе G и ОЗСС на графе $G(g)=(V, E\setminus\{g\})$ эквивалентны. Отсюда следует, что для нахождения избыточных ограничений в (2), надо проверить условие $g\in T_*$. Следовательно, нахождение избыточных ограничений сводится к определению: является ли ребро g ребром дерева T_* или нет, что невозможно осуществить за полиномиальное время, так как задача Штейнера NP -полная.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 3. Если в Ω не существует подграф, который не содержит хотя бы одно ребро оптимального дерева T_* Штейнера, то T_* является оптимальным решением ОЗСС.

Согласно утверждениям 2 и 3 получаем, что множество вершин каждого подграфа Γ из Ω должно содержать хотя бы одно ребро оптимального дерева Штейнера. Следовательно, надо рассматривать только те подграфы Γ из Ω, которые содержат различные ребра оптимального дерева Штейнера. Отсюда получаем, что $|\Omega_0| \le |V|-1$.

Пусть $\mathrm{H}(i,j)$ – множество подграфов, которые изоморфны H и содержат ребро (i,j). Пусть $\mathrm{H}_0(i,j)=\Omega\setminus \mathrm{H}(i,j)$. Рассмотрим двойственную задачу к (1) – (3):

$$\max \sum_{r\in N_0}\sum_{\Gamma\in \mathrm{H}(i,j)} u_r^r(\Gamma) - u_s^r(\Gamma),$$

$$\sum_{\Gamma\in \mathrm{H}(i,j)} u_j^r(\Gamma) - u_i^r(\Gamma) \le w_{ij}^r, \quad r\in N_0, \quad (i,j)\in E,$$

$$\sum_{r\in N_0} w_{ij}^r \le c_{ij}, \quad r\in N_0, \quad (i,j)\in E,$$

$$w_{ij}^r \ge 0, \quad r\in N_0, \quad (i,j)\in E.$$

Число переменных этой задачи экспоненциально зависит от числа вершин графа G. Путем замены $\sum_{\Gamma\in \mathrm{H}(i,j)} u_i^r(\Gamma)$ на u_i^r двойственную задачу можно представить в следующем виде:

$$\max \sum_{r\in N_0} u_i^r - u_s^r \tag{5}$$

$$u_j^r - u_i^r \le w_{ij}^r + \sum_{\Gamma\in \mathrm{H(i,j)}} u_{\mathrm{j}}^{\mathrm{r}}(\Gamma) - u_i^{\ r}(\Gamma) \quad, \ r\in N_0, \quad (i,j)\in E, \tag{6}$$

$$\sum_{r\in N_0} w_{ij}^r \le c_{ij}\ ,\quad r\in N_0,\qquad (i,j)\in E\,, \tag{7}$$

$$w_{ij}^r \ge 0\,,\quad r\in N_0,\qquad (i,j)\in E\,. \tag{8}$$

Утверждение 4. Существует оптимальное решение задачи (5) – (8), такое, что $u_j^r(\Gamma)-u_i^r(\Gamma)\ne 0$ только для одного подграфа Γ из $\mathrm{H}(i,j)$.

Доказательство. Допустим, что существуют хотя бы два подграфа $\Gamma_1,\Gamma_2\in \mathrm{H}(i,j)$, такие, что $u_j^r(\Gamma_k)-u_i^r(\Gamma_k)\ne 0$ для k = 1,2. В этом случае легко можно переопределить значения для разницы двойственных переменных таким образом, после чего оптимальное значение целевой функции (5) не изменится и ограничения (6) не нарушатся. Аналогично переопределив значения разницы двойственных переменных, когда алгебраическая сумма их не равна нулю, доказываем справедливость утверждения.

По утверждению 4 ограничения (6) можем заменить на следующие условия:

$$u_j^r-u_i^r \le w_{ij}^r+u_j^r(\Gamma(i,j))-u_i^r(\Gamma(i,j))\,,\ r\in N_0\ ,\ (i,j)\in E\ , \tag{9}$$

где $\Gamma(i,j)$ – произвольный подграф, который содержит ребро (i,j) и изоморфный H. Следовательно, если граф H имеет простую структуру, то $\Gamma(i,j)$ можно определить за полиномиальное время, и в этом случае получим задачу линейного программирования (5), (7) – (9), для которой число переменных оценивается как $O(|V|^3)$. Так как прямая задача (1) – (4) является линейной релаксацией ОЗСС, то, решив задачу (5), (7) – (9) с помощью одного из существующих методов решения общей задачи линейного программирования, можно определить нижнюю оценку для функционала ОЗСС за полиномиальное время. Если H – граф типа дерева, паросочетания и т.д., то понятно, что $\Gamma(i,j)$ может быть определен за полиномиальное время.

Теперь, пусть H – произвольный лес с числом ребер не больше, чем k.

Теорема 1. Задача существования решения ОЗСС, где $N=V$ и H – произвольный лес с k числом ребер, имеет решение тогда и только тогда, когда реберная связность графа G равна $k+1$.

Доказательство. Пусть H – некоторый лес и $|E(H)|=k$. Покажем, что если реберная связность графа G равна $k+1$, то ОЗСС имеет хотя бы одно допустимое решение. Допустим, что из графа G удалены ребра произвольного подграфа, изоморфного H. Если в полученном графе не существует ни одного пути, соединяющего хотя бы одну пару узлов из N, то получаем, что реберная связность графа G меньше чем $k+1$. Это противоречие доказывает тогда и только тогда часть теоремы. Для доказательства второй части теоремы покажем, что если реберная связность графа G равна k, то ОЗСС не имеет решения. Пусть реберная связность графа G равна k. Тогда в G существуют k

различных ребер $e_1,...,e_k$, после удаления, которых граф G распадается на несколько компонент связности. По определению реберной связности графа получаем, что множество ребер $e_1,...,e_k$ является минимальным по включению. Поэтому подграф, определенный множеством ребер $e_1,...,e_k$, не содержит циклов, т.е. он изоморфный некоторому лесу с числом ребер k, т.е. графу H.

Согласно этой теореме, в данном случае ограничения (2) можно заменить на условия существования $k+1$ реберно-непересекающихся путей между всеми парами узлов из N, и, таким образом, число переменных и число ограничений ОЗСС будут выражаться как полином третьей степени от числа вершин графа G. На базе этого свойства предложены алгоритмы нахождения верхней и нижней оценок для оптимального значения ОЗСС при в $k=1$ и $2 \leq |N| \leq |V|$.

Рассмотрим еще один случай ОЗСС, когда $N=V$ и множество ребер $E(H)$ графа H содержит по одному ребру из всех реберно-непересекающихся простых циклов в G. Этот случай ОЗСС интересен тем, что в реальных ситуациях для защиты информационного потока в линиях сетей связи каждая линия должна лежать на замкнутой части сети. Относительно этого случая ОЗСС можем доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Задача существования решения ЗСНС при условии, что $N=V$ и множество ребер $E(H)$ графа H содержит по одному ребра из всех простых реберно-непересекающихся циклов, имеет решение, если реберная связность графа G равна 4.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы можно показать используя следующий результат, который доказан в [4]: если реберная связность графа G равна 4, то в G существуют два реберно-непересекающиеся остовные деревья. Допустим, что из каждого q простого реберно-непересекающегося цикла удалено одно ребро. Пусть T_1 и T_2 – два реберно-непересекающиеся остовные деревья в графе G. Понятно, что ребра деревьев T_1 и T_2 образуют простые циклы в графе G, и некоторые из этих циклов могут иметь общие ребра, а некоторые нет. Поэтому при удалении по одному ребру из каждого простого цикла, не имеющего общих ребер с другими циклами, отставшие ребра этих циклов лежат на путях, соединяющих концевые вершины удаленных ребер. Так как произвольное остовное дерево содержит хотя бы одно ребро из каждого реберно-непересекающегося простого цикла, то удаленное ребро может быт ребром либо T_1, либо T_2. Поэтому после удаления ребра множества $E(H)$ из графа G в полученном графе существует хотя бы один путь между всеми парами узлов из $N=V$, что и доказывает теорему.

Для рассмотренных случаев графа H решение задачи о допустимости находится за полиномиальное время. Также проведены эксперименты на эффективность алгоритмов нахождения нижней и верхней оценок в случае, когда H

имеет две вершины и одно ребро. Эти оценки могут быть также использованы для определения мишени (taget) в схеме метода ветвей и границ [5].

Ф.А. Шаріфов

ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ ЗНАХОДЖЕННЯ ОЦІНОК У ЗАГАЛЬНІЙ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ НАДІЙНИХ МЕРЕЖ

Розглядається задача синтезу мереж за умови, що між двома вершинами мережі є хоча б один шлях, що з'єднує довільну пару її вузлів, після вилучення ребер підграфа, ізоморфного заданому графу. Показано, що у випадку, коли останній граф має просту структуру, нижня та верхня оцінки можуть бути ефективно визначені за допомогою поліноміального алгоритму.

F.A. Sharifov

POLYNOMIAL SOVABILITY OF FINDING THE BOUNDS FOR GENERAL DESIGN REABILITY NETWORKS PROBLEM.

We consider the design minimum cost network problem under requirement that if edges of any isomorphic subgraph to given a graph, are deleted from the network then there exist a path between every pair of distinct nodes in the network. It is shown that when the graph has a simple structure the upper and lower bounds for this problem can be defined by polynomial time algorithm.

1. *Benzer S.* On the Topology of the Genetic Fine Structure // Proc. Natl. Acad., Sci. U.S. – 1959. – 45. – P. 1607–1620.
2. *Шарифов Ф.А.* Задача синтеза связных сетей относительно изоморфных подграфов // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – №4. – С. 126–131.
3. *Kerivin H., Mahjoub A.R.* Separation of partition inequalities for (1,2) survivable network design problem // Oper. Res. Lett. – 2002. – 30, N 4. – P. 265–268.
4. *Kundu S.* Bound on the number of disjoint spanning trees // J. of Comb. Theory. – 1974. – 17. – P. 199–203.
5. *Volker S.* Target-oriented branch and bound method for global optimization // J. of global optimization. – 2003. – 23, N 3. – P. 261–277.

Получено 22.03.2005