Теорія оптимальних рішень

Предложена оптимизационная модель для механических конструкций, описываемых системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно моментов и прогиба пластины. Рассмотрены сопряженные краевые задачи для определения производных от функционалов модели по управляющей функции. Сформулирована теорема существования и единственности решения сопряженной краевой задачи. Описан PLAT-алгоритм для решения данной модели на основе барьерных функций.

УДК 518.9

О.Н. ТОКАРЕВА

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПЛАСТИН

Представим оптимизационную модель в виде нахождения управляющей функции

$$q(x) \in L_2(\Omega), \Omega \subset R^2, x = \left[x_1, x_2\right]^T \in \Omega,$$

которая обеспечивает

$$\max w_0 = -\min\left(-w_0\right) = -\min \overline{w}_0 \qquad (1)$$

при ограничениях

$$w_1 = \underline{q} - q \le 0\,, \; w_2 = q - \overline{q} \le 0,$$
$$w_3 \le 0, \; w_4 \le 0 \qquad (2)$$

и ограничениях в форме краевой задачи

$$K s = Q \qquad (3)$$

с однородными граничными условиями для свободно опертой пластины:

$$s = 0, \, s = \left[\, s_i \,\right], i = \overline{1, 4} \text{ на } \Gamma. \qquad (4)$$

Здесь

$$w_0 = \omega - 1, \, \omega = \left[1/\left(h^2 \sigma_{yp}\right)\right]^2 \left(36 s_1^2 - \right.$$
$$\left. -36 s_1 s_2 + 36 s_2^2 + 108 s_3^2\right), \, w_3 =$$
$$= \left(sign \; s_4\right) s_4 - \Delta; \, w_4 = \omega - 1; \qquad (5)$$

$$K s = \left[K_i \, s\right]^T, i = \overline{1,4}; \, K_1 s = -\left(12 / E h^3\right)\left(s_1 - \right.$$
$$\left. -\nu s_2\right) - \partial^2 s_4 / \partial x_1^2, K_2 s =$$
$$= -\left(12 / E h^3\right)\left(-\nu s_1 + s_2\right) - \partial^2 s_4 / \partial x_2^2,$$
$$K_3 s = -24\left(1 + \nu\right) s_3 / E h^3 + 2 \partial^2 s_4 / \partial x_1 \partial x_2,$$
$$K_4 s = -\partial^2 s_1 / \partial x_1^2 - \partial^2 s_2 / \partial x_2^2 +$$
$$+ 2 \partial^2 s_3 / \partial x_1 \partial x_2 \qquad (6)$$

или в блочной форме

$$Ks = \left[K_I \bar{s} + K_{II}\text{€}, K_{III}\bar{s} + K_{IV}\text{€}\right]^T, \bar{s} = \left[s_1, s_2, s_3\right]^T, \text{€} = s_4,\ K_I\ \bar{s} =$$

$$= \left[-12s_1 / Eh^3 + 12\text{€}s_2 / Eh^3, 12\text{€}s_1 / Eh^3 - 12s_2 / Eh^3, -24(1+\text{€})s_3 / Eh^3\right]^T,$$

$$K_{II}\text{€} = \left[-\partial^2 s_4 / \partial x_1^2, -\partial^2 s_4 / \partial x_2^2, 2\partial^2 s_4 / \partial x_1 \partial x_2\right]^T,\ K_{III}\ \bar{s} =$$

$$= -\partial^2 s_1 / \partial x_1^2 - \partial^2 s_2 / \partial x_2^2 + 2\partial^2 s_3 / \partial x_1 \partial x_2, K_{IV}\text{€} = 0,\ Q = \left[0, 0, 0, q\right]^T. \qquad (7)$$

В формулах (5) – (7) K_{IV} – нулевой оператор; E – модуль упругости изотропного материала; € – коэффициент Пуассона; $h = \text{const}$ – толщина пластины; σ_{yp} – константа текучести материала; $\underline{q}, \bar{q}, \Delta = \text{const}$; $s = s(x)$ – вектор состояния; s_1 и s_2 – изгибающие моменты на единицу длины, действующие в сечениях пластины, перпендикулярных соответственно осям x_1 и x_2; s_3 – крутящий момент на единицу длины сечения; s_4 – прогиб пластины; соотношения (3), (6) – уравнение изгиба пластины под действием поперечной нагрузки $q(x)$ [1]; $\omega - 1 \le 0$ – условие, которое должно выполняться на поверхностях пластины согласно критерию Мизеса; Ω – область с границей Γ, удовлетворяющей условию Липшица; $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых по Лебегу в области Ω.

Построим конструкцию производной по управляющей функции $q(x)$ для функционала модели $\overline{w}_0$, зависящего от вектора состояния $s(x)$. Для вычисления этой производной нужно, используя уравнение в вариациях (8)

$$K\delta s = \delta Q \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (8)$$

$$\delta s = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \qquad (9)$$

исключить δs из соотношения

$$\delta \overline{w}_0 = \left(\partial \overline{w}_0 / \partial s\right)^T \delta s \qquad (10)$$

на основе решения краевой задачи

$$K\lambda = \partial \overline{w}_0 / \partial s \ \text{ в } \Omega,\ \lambda = \left[\lambda_i\right], i = \overline{1, 4}, \qquad (11)$$

$$\lambda = 0 \ \text{ на } \Gamma \qquad (12)$$

для симметричного оператора K.

Умножим скалярно $K\delta s - \delta Q = 0$ на λ:

$$\lambda^T K \delta s - \lambda^T \delta Q = 0.$$

С учетом (11) в силу симметрии оператора K имеем

$$\left(\partial \overline{w}_0 / \partial s\right)^T \delta s - \lambda^T \delta Q = 0 \ . \qquad (13)$$

Из формул (13), (10) следует

$$\delta \overline{w}_0[\delta Q] = \lambda^{0T} \delta Q = \lambda_4^0 \delta q \, , \ \delta Q = [0,0,0,\delta q]. \qquad (14)$$

Для функционалов w_j, $j = 3$ или 4 аналогично (14) с правой частью $\partial w_j / \partial s$ в (11) имеем $\delta w_j = \lambda_4^j \delta q$, где $j = 3$ или 4.

При формулировке сопряженной краевой задачи (11), (12) использовано свойство симметрии оператора K, выраженное соотношением

$$\int_\Omega \left(\lambda^T K s - s^T K \lambda\right) d\, x = 0. \qquad (15)$$

Справедливость (15) для K из (6) можно подтвердить, применяя формулу Грина с учетом граничных условий (4), (12). С оператором K связана билинейная форма $\alpha(\lambda, s)$, полученная при доказательстве его симметрии :

$$\alpha(\lambda, s) = \int_\Omega \Big[\left(\partial \lambda_1 / \partial x_1\right)\left(\partial s_4 / \partial x_1\right) + \left(\partial \lambda_2 / \partial x_2\right) \left(\partial s_4 / \partial x_2\right) -$$

$$-2\left(\partial \lambda_3 / \partial x_2\right) \left(\partial s_4 / \partial x_1\right) + \left(\partial \lambda_4 / \partial x_1\right) \left(\partial s_1 / \partial x_1\right) + \left(\partial \lambda_4 / \partial x_2\right) \left(\partial s_2 / \partial x_2\right) -$$

$$-2\left(\partial \lambda_4 / \partial x_2\right)\left(\partial s_3 / \partial x_1\right)\Big] dx + \int_\Omega \Big[-12\lambda_1 s_1 / Eh^3 + 12\text{€}\lambda_1 s_2 / Eh^3 -$$

$$-12\lambda_2 s_2 / Eh^3 + 12\text{€}\lambda_2 s_1 / Eh^3 - 24(1+\text{€})\lambda_3 s_3 / Eh^3\Big] dx =$$

$$= \alpha_1(\lambda, s) + \alpha_2(\lambda, s). \qquad (16)$$

Имеют место следующие зависимости:

$$(\lambda, Ks)_{[L_2(\Omega)]^4} = (\overline{\lambda}, K_{II}\, \text{€})_{[L_2(\Omega)]^3} = (\tilde{\text{€}}, K_{III}\, \overline{s})_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \text{€€}(\tilde{\text{€}}, \text{€}) = \text{€€}(\lambda_4, s_4),$$

$$\text{€€}(\tilde{\text{€}}, \text{€}) = \int_\Omega D\Big(\left(\partial^2 \lambda_4 / \partial x_1^2\right)\left(\partial^2 s_4 / \partial x_1^2\right) + 2\left(\partial^2 \lambda_4 / \partial x_1 \partial x_2\right)\left(\partial^2 s_4 / \partial x_1 \partial x_2\right) +$$

$$+ \left(\partial^2 \lambda_4 / \partial x_2^2\right) \left(\partial^2 s_4 / \partial x_2^2\right)\Big) \, d\, x, \qquad (17)$$

где $\text{€€}(\tilde{\text{€}}, \text{€})$ — билинейная форма для бигармонического оператора.

$$D\Delta^2 = D\left(\partial^4 / \partial x_1^4 + 2\partial^4 / \partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4 / \partial x_2^4\right), \ \Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 \ ;$$

Δ – оператор Лапласа; $D = Eh^3 / \left[12\left(1 - \text{€}^2\right)\right] > 0$ – цилиндрическая жесткость пластины.

$$\alpha(\lambda, s) = \text{€€}(\tilde{\text{€}}, \text{€}) = \text{€€}(\lambda_4, s_4), \alpha(\lambda, s) = \alpha(s, \lambda). \qquad (18)$$

При выводе (17) использованы подстановки

$$c_1 = D\left(-\partial^2 c_4 / \partial x_1^2 - \nu \partial^2 c_4 / \partial x_2^2\right), c_2 = D\left(-\partial^2 c_4 / \partial x_2^2 - \nu \partial^2 c_4 / \partial x_1^2\right),$$
$$c_3 = D(1-\nu)\partial^2 c_4 / \partial x_1 \partial x_2$$

с заменой c_i , $i = \overline{1,4}$ соответственно на s_i или λ_i , $i = \overline{1,4}$.

Определим пространство

$$M = \left\{ \lambda \in \left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4 / \lambda = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов [1]} \right\},$$

$$M \subset \left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4,$$

где $\left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4$ – гильбертово пространство, элементами которого служат четырехмерные вектор - функции из $\left[L_2(\Omega) \right]^4$, у которых есть обобщенные производные до первого порядка включительно. Норма $\| \lambda \|_M$ элемента $\lambda \in M$

$$\| \lambda \|_M = \left[\sum_{|i|=1} \sum_{l=1}^{4} \int_{\Omega} \left(D^i \lambda_l \right)^2 dx \right]^{1/2} =$$
$$= \left[\sum_{l=1}^{4} \int_{\Omega} \left[\left(\partial \lambda_l / \partial x_1 \right)^2 + \left(\partial \lambda_l / \partial x_2 \right)^2 \right] dx \right]^{1/2},$$

$i = \left(i_1, i_2 \right)$ – двумерный вектор (мультииндекс), $|i| = i_1 + i_2$. Норма элемента

$$\lambda \in \left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4 \text{ есть } \| \lambda \|_{\left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4} = \left[\sum_{|i| \le 1} \sum_{l=1}^{4} \int_{\Omega} \left(D^i \lambda_l \right)^2 dx \right]^{1/2}.$$

Теорема. Пусть заданы:

1) M – подпространство пространства $\left[W_2^{(1)}(\Omega) \right]^4$;

2) билинейная форма $\alpha(\lambda, s) : M \times M \to R$ - симметричная и M - эллиптическая в том смысле, что $\exists\, \mu > 0, \forall\, \lambda \in M \;\; \mu \| \lambda \|_M^2 \le \alpha(\lambda, \lambda)$;

3) линейная форма $l(\lambda) : M \to R$ - непрерывная.

Тогда задача минимизации функционала

$$J : M \to R \;\; J : \lambda \in M \to J(\lambda) = (1/2)\, \alpha(\lambda, \lambda) - l(\lambda), \tag{19}$$
$$l(\lambda) = \left(\partial a / \partial s , \lambda \right)_{\left[L_2(\Omega) \right]^4} , \;\; a = \overline{w}_0 \text{ или } w_4$$

имеет единственное решение.

Так как билинейная форма $\tilde{\alpha}(\tilde{\lambda},\tilde{s}) = \alpha(\lambda_4, s_4)$ является V - эллиптической [2]: $\exists b > 0, \forall \tilde{\lambda} \in V$,

$$b\|\tilde{\lambda}\|_V^2 \le \tilde{\alpha}(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}),\ V = \left\{\tilde{\lambda} \in W_2^{(1)}(\Omega) / \tilde{\lambda} = 0 \text{ в смысле теории следов } \right\}. \quad (20)$$

В силу (18), (20) $\xi\|\lambda\|_M^2 \le \alpha(\lambda, s), \xi = b\|\tilde{\lambda}\|_V^2 / \|\lambda\|_M^2$. Другими словами, билинейная форма $\alpha(\lambda, s)$, соотнесенная оператору K, является M - эллиптической и с учетом симметрии данной формы определяет новое скалярное произведение $(\lambda, s)^M = \alpha(\lambda, s)$ в пространстве M.

Скалярное произведение $(\lambda, s)^M$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения и порождает на элементах пространства M метрику $\rho^M(\lambda, s) = \|\lambda - s\|^M = \sqrt{\alpha(\lambda - s, \lambda - s)}$, эквивалентную метрике $\rho_M(\lambda, s) = \|\lambda - s\|_M$.

По теореме Рисса [2] о представлении линейного ограниченного функционала существует такой элемент $t \in \left[W_2^{(1)}(\Omega)\right]^4$, $t \overline{\in} M$, что для $\forall \lambda \in M$ $l(\lambda) = \alpha(t, \lambda)$. С учетом симметрии билинейной формы $\alpha(\lambda, s) = \alpha(s, \lambda)$ решение задачи минимизации (19) равносильно минимизации расстояния между элементом t и подпространством M относительно нормы $\sqrt{\alpha(.,.)}$. Таким образом, решение представляет проекцию элемента t на множество M относительно скалярного произведения $\alpha(.,.)$. По теореме о проекции такой элемент существует и единственный.

Предложенный алгоритм PLAT для решения задачи (1) – (6) реализует следующую конструкцию для управляющей функции q^{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ в окрестности решения:

$$q^{k+1} = q^k + \beta^{\eta_k} \delta q^k,\ \delta q^k = -m^{0k} - m^k p^k, \quad (21)$$

где k – номер итерации PLAT-алгоритма, $0 < \beta < 1$; $m^0 = \lambda_4^0$, $m = \lambda_4^i$; λ_4^0, λ_4^i – компонента решения сопряженной системы (11) с правой частью соответственно $\partial \overline{w}_0(s) / \partial s$ и $\partial w_i(s) / \partial s$; i – индекс активного ограничения $-\varepsilon < w_i < 0$, $\varepsilon > 0$; p – оценка множителя Лагранжа для активного ограничения $w_i \le 0$. Функция $\delta q^k(x)$ – решение квадратичной подзадачи: найти

$$\min \Phi(\delta q) = m^0 \delta q + (1/2)(\delta q)^2 \quad (22)$$

при ограничении

$$m\delta q + t^{-1}b - (1/r)t^{-1}\rho = 0,$$

$$\rho = -\left((1/r)t^{-1} + mm\right)^{-1}\left(mm^0 - t^{-1}b\right), \tag{23}$$

$b = \dfrac{d\phi_i(w_i)}{d\,w_i}$, $t = \dfrac{d\,b}{d\,w_i}$, $\phi_i(w_i) = -\ln(-w_i)$ – барьерная функция. Вариация $\delta q(x)$ получена из условия $\dfrac{\partial L}{\partial \delta q} = m^0 + \delta q + mu = 0$, $L = m^0\delta q + (1/2)(\delta q)^2 + {}$ $+u\left(m\delta q + t^{-1}b - (1/r)t^{-1}p\right)$; u – множитель Лагранжа для ограничения (23). Ограничение (23) построено преобразованием $\dfrac{\partial \Delta R(\delta q)}{\partial \delta q} = 0$ при предпосылках, аналогичных [3]; $\Delta R(\delta q)$ – выраженное через δq приращение барьерной целевой функции $R = \overline{w}_0 + r\phi(w_i)$ с удержанием членов до второй вариации $\delta^2 R$ включительно.

В формуле (21) η_k – наименьшее неотрицательное целое, для которого выполняются условия

1) $R\left(r_k, q^k + \beta^{\eta_k}\delta q^k\right) - R\left(r_k, q^k\right) < \varepsilon_1\beta^{\eta_k}\delta R\left(r_k, \delta q^k\right)$, $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$,

$r_k = \theta r_{k-1}$, $0 < \theta < 1$, $\delta R(r_k, \delta q^k) = \delta\overline{w}_0 + \delta\left(r\phi_i(w_i)\right) = \lambda_4^0\delta q + rb\lambda_4^i\delta q$;

2) $w_j\left(q^k + \beta^{\eta_k}\delta q^k\right) \le 0$, $j = \overline{1,4}$, $x \in \Omega$.

В PLAT-алгоритме на каждой итерации необходимо решать краевую задачу (3), (4), а также для нахождения производных по управляющей функции от критериального функционала и функционалов ограничений, зависящих от вектора состояния s, сопряженные краевые задачи вида (11), (12). Представленная здесь вычислительная схема PLAT-алгоритма для модели (1) – (4) – частный случай общей векторно-матричной версии для $|D| > 1$, $|D|$ – размерность индексного множества ε - активных ограничений и для числа управляющих функций больше единицы.

О. М. Токарєва

ДО ПИТАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ПЛАСТИН

Запропоновано оптимізаційну модель для механічних конструкцій , що описуються системою диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку щодо моментів та прогину пластини. Розглянуто спряжені крайові задачі для визначення похідних від функціоналів моделі по функції керування. Сформульовано теорему існування і єдиності розв’язку

спряженої крайової задачі. Описано PLAT-алгоритм для розв’язання поданої моделі на основі бар’єрних функцій.

O. N. Tokareva

ON OPTIMAL DESIGN OF PLATES

The paper proposes an optimisation model for mechanical constructions described by the second order partial differential equation system with respect to moments and plate deflection. The paper aso considers conjugated boundary-value problems for finding derivatives model functionals as for a control function. A theorem about existense and uniqueness of a solution to a conjugated boundary-value problem is formulated. The PLAT-algorithm is described that is used to solve the present model on the basis of barrier functions.

1. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование. Механическкие системы и конструкции. – М.: Мир, 1983 . – 479 с .
2. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589 с.
3. *Токарева О.Н.* Об оценках скорости сходимости алгоритмов на основе барьерных функций с использованием задач квадратичного программирования // Кибернетика. – 1981. – № 5. – С. 107–112.

Получено 25. 02. 2005