УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ*

Разработаны и обоснованы декомпозиционные методы точного и приближенного решения задач, возникающих при исследовании сложных целочисленных оптимизационных моделей с управляемыми и неточно заданными исходными данными. Они основаны на аппроксимации исходных задач задачами более простой структуры, объединяют и используют идеи методов релаксации, линеаризации, отсекающих плоскостей Келли.

Введение. В настоящее время математические модели дискретной оптимизации охватывают широкий круг прикладных задач, которые возникают при принятии оптимальных проектных, технологических и экономических решений. Кроме того, ряд теоретических проблем самой математики может быть сформулирован в виде дискретных оптимизационных задач. Поэтому всё более возрастает необходимость интенсивного развития теории и методов поиска решений задач дискретной оптимизации [1-6].

В классической постановке задачи дискретной, в том числе и целочисленной, оптимизации предполагается, что исходные данные известны точно. Однако на практике это осуществляется редко. Исходным данным присущи неопределенность, динамический характер, зависимость от некоторых параметров, которые поддаются регулированию, наличие погрешностей вычислений. Это приводит к необходимости исследования сложных моделей и разработки эффективных методов решения задач целочисленной оптимизации. При этом исходные данные таких моделей могут интерпретироваться как управляемые, неточно заданные, случайные.

* Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (Проект Ф7/275-2001)

Задание неопределенности посредством фиксации возможной области изменения исходных данных задач с учетом типов этих данных позволило исследовать различные постановки задач, описывающих разнообразные моделируемые ситуации, и разработать эффективные методы их решения [3-6].

В данной статье представлены результаты разработки и обоснования методов точного и приближенного решения задач, возникающих при исследовании сложных целочисленных оптимизационных моделей с управляемыми и неточно заданными исходными данными и основанных на аппроксимации их задачами более простой структуры. Эти методы являются декомпозиционными, объединяют и используют идеи методов релаксации [7], линеаризации [8], отсекающих плоскостей Келли [9].

Исследуемые задачи имеют следующий вид:

$$P\text{: } \max\{\operatorname{extr} cx \mid c \in C\} \mid x \in X\},$$

где $X=\{x\in Z^n \mid f_i(x)\leq 0 \ \forall f_i\in F_i,\ i=1,\dots m\}$, $c \in R^n$ – вектор-строка; Z^n – пространство n–мерных целочисленных векторов из R^n, $f_i : R^n \to R^1$; F_i – множество выпуклых непрерывно дифференцируемых функций, $F_i \subset C^1$, $i\in N_m=\{1,\dots,m\}$.

Под экстремумом будем подразумевать максимум, если данные, определяющие вектор c, управляемые, и соответственно минимум, если данные заданы неточно.

Оптимальным решением задачи P является пара $(\bar{c}, \bar{x})$, элементы которой $\bar{c} \in C$, $\bar{x} \in X$ удовлетворяют условию

$$\overline{cx} = \begin{cases} \max\{c\bar{x} \mid c\in C\} \geq \max\{cx \mid c\in C\}, & \text{если данные о векторе } c \text{ управляемые;} \\ \min\{c\bar{x} \mid c\in C\} \geq \min\{cx \mid c\in C\} \text{ -} & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1}$$

для всех (c, x), таких, что $c \in C$, $x\in X$.

Обозначив x_0 скалярную переменную, перепишем задачу P таким образом:

$$\max\ \{x_0 \mid \exists c \in C\text{: } x_0\leq c\, x,\ x_0\in R^1,\ x\in X\}, \tag{2}$$

если данные о векторе c управляемые, и

$$\max\ \{x_0 \mid \forall c \in C\text{: } x_0\leq c\, x,\ x_0\in R^1,\ x\in X\}, \tag{3}$$

если информация о векторе c задана неточно.

Очевидно, что задачи (2), (3) эквивалентны соответственно следующим задачам:

$$\max\ \{x_0 \mid (x_0, x) \in \bigcap_{i\in N_m} \ \bigcup_{c\in C} \bigcap_{f_i\in F_i} \{x_0\leq c\, x,\ f_i(x)\leq 0,\ x\in Z^n\}\},$$

$$\max\ \{x_0 \mid (x_0, x) \in \bigcap_{i\in N_m} \ \bigcap_{c\in C} \ \bigcap_{f_i\in F_i} \{x_0\leq c\, x,\ f_i(x)\leq 0,\ x\in Z^n\}\}. \tag{4}$$

Определим множества $X_i=\{x\in Z^n \mid f_i(x)\leq 0 \ \ \forall f_i(x)\in F_i\}$, $i\in N_m$, $X_i= \bigcap\limits_{i\in N_m} X_i$.

В дальнейшем будем предполагать, что множество X ограниченное.

Определим в пространстве $D^{n+1}=R^1\times Z^n$ множества $S=\{(x_0, x)\ \alpha c\in C \ \ x_0\leq c\, x,$ $x_0\in R^1,\ x\in Z^n\}$, $G=\{(x_0, x) \in S \mid x\in X\}$, где

$$\alpha=\begin{cases}\exists, \text{если данные о векторе } c \text{ управляемые,}\\ \forall \text{ - в противном случае,}\end{cases}$$

и рассмотрим задачу следующего вида:

$$\max \{x_0 \mid (x_0, x)\in G\}. \tag{5}$$

На основании вышеизложенного ясна взаимосвязь между исходной задачей P и задачей (5). Сформулируем полученные результаты в виде теоремы 1, устанавливающей эквивалентность этих задач.

Теорема 1. 1. Задача P не имеет допустимых решений тогда и только тогда, когда множество G пусто.

2. Если (c, x) – допустимое (оптимальное) решение задачи P и $x_0\leq cx$ $(x_0=cx)$, то (x_0, x) – допустимое (оптимальное) решение задачи (5);
c – допустимое (оптимальное) решение задачи

$$\max \{c\, x \mid c \in C\}, \tag{6}$$

если данные о векторе c управляемые, и

$$\min \{c\, x \mid c \in C\}, \tag{7}$$

если они заданы неточно.

3. Если (x_0, x) – допустимое (оптимальное) решение задачи (5), то для оптимального значения целевой функции задачи (6) или (7) выполняется соответственно соотношение $x_0\leq c\, x$ $(x_0=c\, x)$. Если c – оптимальное решение задачи (6) или (7), то (c, x) – допустимое (оптимальное) решение задачи P.

Следует отметить, что решение задачи (5) вызывает большие трудности вследствие того, что её допустимая область описывается огромным либо бесконечным числом ограничений, которые сами являются довольно сложными, поэтому целесообразно применение здесь сочетания процедур релаксации [7] и линеаризации [8]. Для задачи (5), в том случае, когда ей соответствует задача (3), возможно упростить процесс решения посредством применения процедуры сужения допустимой области. Таким образом, оптимальное значение целевой функции задачи (5) будет нижней (верхней) границей любой своей релаксации (сужения).

Назовём величину $r_i(x)=\max\{f_i(x) | f_i(x)\in F_i\}$, $i\in N_m$, отклонением точки $x\in Z^n$ от границы множества X_i, а величину $r(x)=\max\ \{r_i(x) \mid i \in I\}$ – отклонением точки $x\in Z^n$ от границы множества X. Для некоторого вектора $x^j\in Z^n$, j =1,2,…, рассмотрим задачу MP, имеющую следующий вид:

$$\text{максимизировать } x_0 \tag{8}$$

при условиях

$$x_0\leq \operatorname*{extr}_{j\in N_k} c^j x,\ c^j\in C,\ k=1, 2,\ldots, \tag{9}$$

$$\max_{j\in N_l} (\, f_i^{\,j} (x^j) +(\, f_i^{\,j}\,)' (x^j) (x- x^j)\leq 0,\ \ f_i^{\,j} \in F_i,\ i\in I \subset N_m,\ l=1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$x\in Z^n. \tag{11}$$

Если в качестве экстремума подразумеваем минимум, то задача *MP* есть релаксацией задачи *P*. Если же под экстремумом понимаем максимум, то ограничения (9) являются сужением соответствующих ограничений задачи (3).

Обозначим $G(MP)$ множество допустимых решений задачи *MP*.

Лемма. Для того, чтобы точка (x_0, x) из множества $G(MP)$ принадлежала множеству G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$x_0 \le \mathrm{extr}\{cx \mid c \in C\}, \tag{12}$$

$$r(x) \le 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть точка $(x_0, x) \in G(MP)$ принадлежит также множеству G, т.е. $(x_0, x) \in S$, откуда следует, что $x_0 \le \max\ \{c\,x \mid c \in C\}$, если данные о векторе c управляемые и $x_0 \le \min\{cx \mid c \in C\}$, если данные заданы неточно. Следовательно, выполняется неравенство (12). Условие (13) вытекает из принадлежности (x_0, x) множеству G и определения величины $r(x)$. Достаточность условий (12), (13) следует из определения множества G и отклонения $r(x)$.

Теорема 2. Оптимальное решение (x_0, x) задачи *MP* является оптимальным решением задачи (5) тогда и только тогда, когда выполняются условие (13) и

$$x_0 = \mathrm{extr}\{cx \mid c \in C\}. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно лемме, оптимальное решение задачи *MP* является допустимым решением задачи (5) тогда и только тогда, когда выполняются условия (12) и (13). По теореме 1 точка (x_0, x) – оптимальное решение одной из задач (6), (7) тогда и только тогда, когда (c, x) – оптимальное решение задачи (2) или (3) и $x_0 = cx$. Следуя определению оптимального решения задачи *P,* пара (c, x) – оптимальное решение этой задачи тогда и только тогда, когда её элементы $c \in C$, $x \in X$, удовлетворяют условию (1) для всех (c, x), таких, что $c \in C$, $x \in X$. Таким образом, учитывая то, что x_0 удовлетворяет одновременно соотношениям (1) и (12), следует справедливость равенства (14).

Алгоритм

1. Выбираем $c^1 \in C$, полагаем k, l=1, $Q^1 = \{x \in Z_+^n\}$, $S^1 = \{x_0, x\} \mid x_0 \le c^1 x,\ x_0 \in R^1,\ x \in Z^n\}$. Множества, описываемые ограничениями вида (10) и (9), представим соответственно в виде множеств Q^l и S^k.

2. Решаем задачу частично целочисленного программирования *MP*. Если она недопустима, то на основании того, что ограничения (10) являются релаксацией ограничений $f_i(x) \le 0\ \ \forall f_i(x) \in F_i$ задачи (5) и п.1 теоремы 1 заключаем, что задача *P* также недопустима. Этот случай возможен лишь для k=1. Иначе получаем допустимое (оптимальное) решение (x_0^l, x^l) или информацию о том, что целевая функция неограничена на допустимом множестве. Тогда в качестве координат вектора x^l выбираем достаточно большие числа.

3. Находим отклонение $r(x^l)$ от границы множества Q и элемент $f_i \in \bigcup_{i \in I} F_i$, для которого оно достигается. Если $r(x^l) \le 0$, то согласно лемме (теореме 2)

(x_0^l, x^l) – допустимое (оптимальное) решение задачи (5). Переходим к п.4, полагая $(x_0^k, x^k) = (x_0^l, x^l)$. В противном случае образуем множество Q^{l+1} следующим образом: $Q^{l+1} = Q^l \cap \{ x\in R^n \mid f_i(x^l)+ f'_i(x^l)(x-x^l)\leq 0$.

Заменяя l на l+1, переходим к п.2.

4. Решаем задачу линейного программирования вида max $\{c\, x^k \mid c \in C\}$, если в исходной задаче P данные, задающие вектор c, управляемые и min $\{c\, x^k \mid c\in C\}$, если данные о векторе c заданы неточно. Пусть c^{k+1} – найденное оптимальное решение.

5. Если $c^{k+1}\, x^k \geq x_0^k$ $(c^{k+1}\, x^k = x_0^k)$, то алгоритм заканчивается. В соответствии с леммой (теоремой 2) точка (x_0^k, x^k) – допустимое (оптимальное) решение задачи (5). На основании п.2 теоремы 1 заключаем, что (c^{k+1}, x^k) – приближенное (оптимальное) решение задачи (5) со значением x_0^k её целевой функции. Иначе образуем множество $S^{k+1}=S^k\cap\{(x_0,x) \mid x_0\leq c^{k+1}\, x^k\}$, если в условиях задачи P extr=min, и заменяя k на k+1, переходим к п. 2, иначе, заменяя k на k+1, переходим к п. 2.

Теорема 3. Если множество X ограничено, то описанный алгоритм сходится к приближенному (оптимальному) решению за конечное число шагов. Если задача P недопустима, то алгоритм заканчивается на первом шаге с заключением о том, что задача недопустима.

Доказательство. Так как задача P имеет конечное оптимальное решение, то начиная с некоторого номера K, последовательность точек $\{x^k\}$ содержится в ограниченном множестве. Следовательно, существует сходящаяся последовательность $\{x_{k_l}\}$. Из условия $x_i\in Z^n$, i=1,2,… следует, что множество точек $\{x_{k_l}\}$ конечно, в силу чего можно выделить стационарную последовательность, т.е. $\exists\, l_*$ такое,что $\forall\, l\geq l_*$ $x_{k_l} = \bar{x}$, так как начиная с номера l_* в задачу MP не вводится ни одного нового ограничения вида (10). Это возможно лишь в случае, когда $\bar{x} \in X$. В п.5 алгоритма, если не выполняется условие (12) или (14), к задаче MP добавляется новое ограничение вида (9) либо заменяется на лучшее. Их число не превышает числа вершин многогранника C, так как ни один из векторов c^{k+1} до выполнения условия (12) или (14) не может быть найден повторно.

Заключение. Построен и обоснован декомпозиционный метод точного и приближенного решения сложных задач целочисленной оптимизации с управляемыми и неточно заданными данными, основанный на конструктивных аппроксимациях их задачами более простой структуры. Дальнейшее развитие данной работы будет направлено на разработку методов решения сложных целочисленных оптимизационных задач с управляемыми исходными данными, что приводит к постановкам задач на невыпуклых множествах. Будут получены критерии допустимости и оптимальности решений указанных задач, исследована их устойчивость.

Н.В. Семенова

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ОПУКЛИХ МНОЖИНАХ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДАНИХ

Розроблені та обгрунтовані декомпозиційні методи точного та наближеного розв'язання задач, що виникають при дослідженні складних цілочислових оптимізаційних моделей з керованими та неточно заданими даними. Вони основані на апроксимації вихідних задач задачами більш простої структури, об'єднують та використовують ідеї методів релаксації, лінеаризації, відтинаючих площин Келлі.

N.V. Semenova

SOLVING INTEGER OPTIMIZATION PROBLEMS ON CONVEX SETS UNDER DATA UNCERTAINTY CONDITIONS

The paper constructs and substantiates decomposition methods used to solve problems exactly and approximately. Such problems emerge when one investigates complicated integer optimization models with controllable and inexact data. Methods are based on approximation of initial problems by problems of a simpler structure, unite and use the ideas of relaxation, linearization and the Kelley cutting plane methods.

1. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Сергиенко И.В.*, *Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. – Киев: Наук. думка, 2003. – 263 с.
3. *Семенова Н.В.* Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования // Кибернетика. – 1984. – №5. – С. 25-31.
4. *Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В.* Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. – 1989. – №2. – С. 42-46, 64
5. *Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В.* Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1990. – **29**, №5. – С. 786-791.
6. *Сергиенко И.В., Рощин В.А., Семенова Н.В.* Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение // Проблемы управления и информатики. – 1998. – №6. – С.116-123.
7. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
8. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
9. *Kelley J.* The cutting plane method for solving convex program // SIAM J. – 1960. – **8**, N4. – P. 703-712.

Получено 25.03.2005