УДК 518.9

Г.Ц. ЧИКРИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача о мягкой встрече двух управляемых колебательных систем. Получены достаточные условия завершения преследования за конечное время. При выполнении специального условия о «взятии следа» убегающего выведена формула для управления преследователя в явном виде.

Введение. Основой применения прямых методов преследования является выполнение условия Л.С. Понтрягина [1]. Однако оно не выполняется для целых классов задач, таких как задачи о мягкой встрече объектов, задачи преследования для колебательных систем и др. Д. Зонневенд предложил модификацию условия Понтрягина, основанную на идее построения управления преследователя по информации о поведении противника в прошлом [2]. Выяснение связи такого подхода с фактическим переходом к новой игре с запаздыванием информации (Г.Ц. Чикрий [3]) способствовало его более глубокому пониманию и дальнейшему развитию. Были получены условия для мягкой встречи объектов, динамика которых соответствует второму закону Ньютона при наличии трения, в частном случае приводящие к движению преследователя по геометрическому следу убегающего [4, 5]. В данной работе впервые исследуется задача о мягкой встрече двух объектов, имеющих динамику «математического маятника».

Рассмотрим следующие две управляемые колебательные системы:

$$\ddot{x} + a^2 x = \rho u,\ x \in R^n,\ \| u \| \le 1; \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + b^2 y = \sigma v,\ y \in R^n,\ \|v\| \le 1, \qquad (2)$$

где x и y – их геометрические координаты (условно говоря, преследователя и убегающего); u и v – их управления, выбираемые в каждый текущий момент времени таким образом, чтобы их реализации были измеримыми функциями; a, b, ρ, σ – положительные числа. Заданы начальные положения и скорости объектов:

$$x(0)=x_0\,,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0\,,\quad y(0)=y_0\,,\quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0\,.$$

Цель преследователя – добиться в некоторый конечный момент времени одновременного совпадения геометрических координат и скоростей преследователя и убегающего, так называемой мягкой встречи, при любом противодействии противника.

Таким образом, предметом изучения является дифференциальная игра, в которой терминальное множество задается равенствами $x=y$, $\dot{x}=\dot{y}$.

Перейдем от систем второго порядка (1), (2) с помощью замены переменных $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, $y_1=y$, $y_2=\dot{y}$ к системам первого порядка

$$\dot{x}_1=x_2\,,\quad \dot{x}_2=-a^2x_1+\rho u\,; \tag{3}$$

$$\dot{y}_1=y_2\,,\ \dot{y}_2=-b^2y_1+\sigma v \tag{4}$$

с начальными условиями

$$x_1(0)=x_1^0=x_0\,,\quad x_2(0)=x_2^0=\dot{x}_0;$$

$$y_1(0)=y_1^0=y_0\,,\quad y_2(0)=y_2^0=\dot{y}_0.$$

Тогда терминальное множество является линейным подпространством в R^{4n} и имеет вид

$$M=\left\{(x_1,x_2,y_1,y_2),\quad x_i\in R^n,\quad y_i\in R^n,\quad i=1,2:x_i=y_i\right\}.$$

Система (3), (4) является частным случаем $4n$-мерной линейной дифференциальной системы $\dot{z}=Az+u-v$, $u\in U$, $v\in V$, где A – квадратная матрица, множества управлений U и V – выпуклые компакты.

В нашем примере

$$A=\begin{pmatrix}0 & E & 0 & 0\\ -a^2E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E\\ 0 & 0 & -b^2E & 0\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}0\\ \rho S\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \sigma S\end{pmatrix},$$

где 0 и E – нулевая и единичная n-мерные матрицы, $S=\left\{x:x\in R^n\|x\|\le 1\right\}$.

Фундаментальная матрица системы (3), (4) такова

$$e^{At}=\begin{pmatrix}\cos at\cdot E & \frac{1}{a}\sin at\cdot E & 0 & 0\\ -a\sin at\cdot E & \cos at\cdot E & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos bt\cdot E & \frac{1}{b}\sin bt\cdot E\\ 0 & 0 & -b\sin bt\cdot E & \cos at\cdot E\end{pmatrix}.$$

Обозначим π – оператор ортогонального проектирования из пространства R^{4n} на подпространство L, являющееся ортогональным дополнением к M в

R^{4n}. Тогда мягкая встреча игроков в некоторый момент T, $T \geq 0$, означает, что $\pi z(T) = 0$. Заметим, что оператору π соответствует матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что для достижения своей цели преследователь использует контр-управления, т. е. в каждый текущий момент времени он строит свое управление по мгновенному значению управления убегающего.

Для применения к решению этой задачи прямых методов необходимо выполнения условия преимущества в ресурсах управления преследователя над убегающим, выраженное через параметры игры, так называемого условия Понтрягина:

$$W(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} V \neq \varnothing \text{ для всех } t \geq 0. \tag{5}$$

В нашей задаче многозначное отображение $W(t)$ имеет следующий вид:

$$W(t) = \bigcap_{v \in S} \bigcup_{u \in S} \begin{pmatrix} \rho/a \, |\sin at| u - \sigma/b \, |\sin bt| v \\ \rho |\cos at| u - \sigma |\cos bt| v \end{pmatrix}.$$

Анализ этого условия показывает: для того, чтобы оно выполнялось необходимо и достаточно выполнения довольно обременительных условий: $b = ka$, где k – натуральное число, и

$$\rho\gamma \geq \sigma, \text{ где } \gamma = \frac{b}{a} \left| \frac{tga\tau}{tgb\tau} \right|, \ \tau \in \left[0, \frac{\pi}{a} \right].$$

В противном случае это условие может выполняться лишь периодически во времени.

Здесь используем модификацию условия Понтрягина, предложенную в [1] и развитую в [3 – 5]. Она основана на предположении, что преследователь строит свое управление не по текущему управлению противника, а по его управлению в прошлом.

Условие. Существует скалярная, монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция $I(t), t \in [0, \infty)$, такая, что $I(0) = 0, I(t) \geq t$ и выполнено следующее условие:

$$W_1(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \dot{I}(t) \pi e^{I(t)A} V \neq \varnothing \text{ для всех } t \geq 0. \tag{6}$$

Несложные выкладки показывают, что в нашей задаче для выполнения этого условия функция $I(t)$ должна удовлетворять равенству $|tgbI(t)| = |tgat|$. Поскольку $I(0) = 0$, то искомая функция имеет вид: $I(t) = a/b \, t$, а достаточными условиями выполнения условия (6) являются неравенства

$$\frac{\rho}{a^2} \geq \frac{\sigma}{b^2}, \ a \geq b. \tag{7}$$

Введем обозначение

$$t_1 = t_1(z^0) = \min\left\{ t \ge 0 : -\left(\pi e^{I(t)A} z^0 + \int_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A} U d\theta \right) \cap \int_0^t W_1(\theta) d\theta \ne \varnothing \right\}, \quad (8)$$

где $z^0 = \left(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0\right)$.

Согласно теореме 1 [4], если выполнено условие (6), время t_1 существует и конечно, то начиная из положения z^0 мягкая встреча может быть осуществлена за время $I(t_1)$. Здесь $I(t_1) = \frac{a}{b} t_1$. На начальном полуинтервале $[0, \tau_0)$, где $\tau_0 = I(t_1) - t_1 = \frac{a-b}{b} t_1$, преследователь использует программное управление, выбираемое в самом начале игры на весь полуинтервал $[0, \tau_0)$. Начиная с момента τ_0 в каждый момент $\tau_0 + t$, $0 \le t \le t_1$, он строит свое управление по управлению убегающего в момент $\tau_0 + t_1 - I(t_1 - t) = \tau_0 + t_1 - \frac{a}{b}(t_1 - t)$, как если бы информация о текущем управлении убегающего поступала ему с временным запаздыванием $\tau(t) = I(t_1 - t) - (t_1 - t) = \frac{a-b}{b}(t_1 - t)$.

Существование обоих управлений преследователя, как программного так и с обратной связью на соответствующих полуинтервале $[0, \tau_0)$ и отрезке $[\tau_0, \tau_0 + t_1]$, следует из непустоты пересечения многозначных отображений в фигурных скобках в (8).

Рассмотрим частный случай этого пересечения, когда

$$\{0\} \in \left(-\pi e^{I(t_1)A} z^0 + \int_0^{I(t_1)-t_1} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} U d\theta \right) \bigcap \int_0^{t_1} W_1(\theta)\, d\theta, \quad (9)$$

где $\{0\}$ – нулевой вектор из R^n.

Из формулы (9) следуют два включения, левую и правую части первого из которых умножим на матрицу $\pi e^{-t_1 A}$, получаем

$$\{0\} \in -\left(\pi e^{(I(t_1)-t_1)A} z^0 + \int_0^{I(t_1)-t_1} \pi e^{(I(t_1)-t_1-\theta)A} U d\theta \right), \quad (10)$$

$$\{0\} \in \int_0^{t_1} W_1(\theta)\, d\theta. \quad (11)$$

Включение (10) после подстановки конкретных параметров игры приобретает вид

$$x_1^0 \cos[a(I(t_1)-t_1)]+\frac{1}{a}x_2^0 \sin[a(I(t_1)-t_1)]+\frac{1}{a}\int_0^{I(t_1)-t_1}\sin[a(I(t_1)-t_1-\theta)]\,u(\theta)d\theta =$$

$$= y_1^0 \cos[b(I(t_1)-t_1)]+\frac{1}{b}y_2^0 \cos[b(I(t_1)-t_1)];$$

$$-x_1^0 a\sin[a(I(t_1)-t_1)]+x_2^0 \cos[a(I(t_1)-t_1)]+\int_0^{I(t_1)-t_1}\cos[a(I(t_1)-t_1-\theta)]\,u(\theta)\,d\theta =$$

$$= by_1^0 \sin[b(I(t_1)-t_1)]+y_2^0 \cos[b(I(t_1)-t_1)]$$

или иначе

$$x_1(\tau_0)=y_1^0 \cos b\tau_0+\frac{1}{b}y_2^0 \sin b\tau_0, \quad x_2(\tau_0)=-by_1^0 \sin b\tau_0+y_2^0 \cos b\tau_0 . \quad (12)$$

Представим такую ситуацию. Преследователь начал преследование убегающего в некоторый момент $\tau_0>0$ и ему стало известно, что его координаты и скорость в этот момент времени связаны с координатами и скоростью убегающего в момент $t=0$ равенствами (12). По аналогии с примером, рассмотренным в [4], назовем его условием «взятия следа». Очевидно, что при условии выполнения неравенств (7) преследователь может совершить мягкую встречу с убегающим в момент времени $\frac{a}{a-b}\tau_0$. Для этого, как следует из включения (11), на отрезке $[\tau_0, \tau_0+t_1]$, $t_1=\frac{b}{a-b}\tau_0$, он должен выбирать свое управление по формуле $u(\tau_0+t)=\frac{\sigma}{\rho}\cdot\frac{a^2}{b^2}v(\tau_0+t_1-\frac{a}{b}(t_1-t))$, которая после вычислений преобразуется к виду

$$u(\tau_0+t)=\frac{\sigma}{\rho}\cdot\frac{a^2}{b^2}v(a/b\cdot t) .$$

Г.Ц. Чикрій

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ЗБЛИЖЕННЯ ДЛЯ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Досліджується задача про м’яке зближення двох керованих коливальних систем. Одержано достатні умови для завершення переслідування за скінченний час. При виконанні спеціальної умови про “взяття сліду” втікача виведена формула для керування переслідувача в явному вигляді.

G.Ts. Chikrii

ONE PROBLEM OF PURSUIT FOR OSCILLATORY SYSTEMS

The problem of soft meeting of two controlled oscillatory systems is treated. Sufficient conditions for pursuit termination in a finite time are obtained. An explicit formula for control of the pursuer is derived, under special condition for finding “tracks” of the evader.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
2. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – 208. – № 3. – С. 520 – 523.
3. *Chikrii G.Ts.* Using the Impact of Information Delay for Solution of Game Problems of Pursuit // Доп. НАН України. – Сер. математ. – 1999. – № 12. – С. 107 – 111.
4. *Chikrii G.Ts.* On a Method of Pursuit in “Tracks”// Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 109 – 113.
5. *Чикрий Г.Ц.* Об одном способе преследования // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2001. – С. 26–30.

Получено 28.02.2005