Теорія оптимальних рішень

УДК 518.9

Ю.Г. КРИВОНОС, И.И. МАТИЧИН, К.А. ЧИКРИЙ

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматривается задача преследования группой управляемых объектов одного убегающего. При этом предполагается, что управление преследователей имеет импульсный характер, что выражается с помощью дельта-функции Дирака. На основе метода разрешающих функций получены достаточные условия поимки. Для случая простых движений сформулировано необходимое и достаточное условие поимки, аналогичное известному правилу «окружения».

Введение. В данной работе рассмотрена задача преследования группой управляемых объектов одного убегающего. При этом предполагается, что управление преследователей имеет импульсный характер [1–4], что выражается с помощью дельта-функции Дирака. Использование подходов, развитых в [1–4], а также основных идей метода разрешающих функций [5], позволило получить достаточные условия поимки. Подробно исследован случай простых движений, для которого сформулировано необходимое и достаточное условие поимки, аналогичное известному правилу «окружения» [6].

Пусть изменение состояния динамической системы $x = \mathrm{col}(x_1,\dots,x_\nu)$, $x_j \in R^{m_j}$, $j = 1,\dots,\nu$, в пространстве R^m, $m = m_1 + \ldots + m_\nu$, задается уравнениями

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j - C_j v, \quad j = 1,\dots,\nu, \qquad (1)$$

где A_j – квадратные матрицы порядка m_j; B_j, C_j – постоянные матрицы размера $m_j \times p_j$ и $m_j \times q$ соответственно. При этом управления преследователей u_j являются импульсными и имеют вид

$$u_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{ij}\delta(t - \tau_i), \qquad (2)$$

где $\delta(\cdot)$ обозначает дельта-функцию Дирака. Векторы скачков u_{ij} принадлежат непустым компактам: $u_{ij} \in U_j$, $U_j \subset R^{p_j}$, а моменты

τ_i образуют возрастающую последовательность, удовлетворяющую следующему условию.

Условие 1. Любой компактный отрезок $[a,b]$ содержит конечное число точек последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Убегающий, в свою очередь, выбирает свое управление $v = v(t)$ в виде измеримой функции времени со значениями из компакта V, $V \subset R^q$.

Терминальное множество M^* состоит из множеств $M_1^*, \ldots, M_\nu^*$, $M_j^* \subset R^{m_j}$, каждое из которых представимо в виде

$$M_j^* = M_j^0 + M_j, \tag{3}$$

где M_j^0 – линейное подпространство из R^{m_j}, а M_j – выпуклый компакт, принадлежащий ортогональному дополнению L_j к подпространству M_j^0 в пространстве R^{m_j}.

Задача преследователей состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая векторы скачков u_{ij}, за конечное время добиться для некоторого j выполнения включения

$$x_j \in M_j^*. \tag{4}$$

Задача убегающего противоположна – избежать выполнения включения (4) на всем полубесконечном интервале времени.

Обозначим π_j – оператор ортогонального проектирования из пространства R^{m_j} на L_j, $e^{A_j t}$ – сумму сходящегося ряда $e^{A_j t} = E + A_j t + \frac{A_j^2 t^2}{2!} + \frac{A_j^3 t^3}{3!} + \ldots$, где E – единичная матрица. Рассмотрим множества

$$W_{0j}(n, v(\cdot)) = W_{0j}(n) = \pi_j e^{A_j(\tau_n - \tau_0)} B_j U_j,$$

$$W_{ij}(n, v(\cdot)) = \pi_j e^{A_j(\tau_n - \tau_i)} B_j U_j - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi_j e^{A_j(\tau_n - \vartheta)} C_j v(\vartheta) d\vartheta,$$

$$W_{ij}(n) = \pi_j e^{A_j(\tau_n - \tau_i)} B_j U_j \overset{*}{-} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi_j e^{A_j(\tau_n - \vartheta)} C_j V d\vartheta,$$

где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \nu$.

Условие 2. Множества $W_{ij}(n)$ непусты при всех n, i, j, $n = 0,1,2,\ldots$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \nu$.

В силу условия 2 можем выбрать из каждого множества $W_{ij}(n)$ некоторый элемент $w_{ij}(n)$. Зафиксируем некоторые наборы $\omega_j = \omega_j(n) = \{w_{ij}(n)\}_{i=0}^{n}$ и положим

$$\xi_j(n, x_j, \omega_j) = \pi_j e^{A_j(\tau_n - \tau_0)} x_j + \sum_{i=0}^{n} w_{ij}(n).$$

Введем функции

$$\tilde{\alpha}_{0j}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) = \tilde{\alpha}_{0j}(n, x_j, \omega_j) =$$
$$= \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha[M_j - \xi_j(n, x_j, \omega_j)] \cap [W_{0j}(n) - w_{0j}(n)] \ne \varnothing\},$$
$$\tilde{\alpha}_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) =$$
$$= \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha[M_j - \xi_j(n, x_j, \omega_j)] \cap [W_{ij}(n, v(\cdot)) - w_{ij}(n)] \ne \varnothing\}. \qquad (5)$$

Поскольку $w_{ij}(n) \in W_{ij}(n, v(\cdot))$ для всех i, j, $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, \nu\}$, то при $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \in M_j$ функции $\tilde{\alpha}_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) = +\infty$ для всех i, j, $v(\cdot)$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, \nu\}$, $v(\cdot) \in V[\tau_0, \tau_n]$. Если же $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \notin M_j$, то значения функций $\tilde{\alpha}_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j)$ конечны.

Пусть $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \notin M_j$. Обозначим

$$k = k(n, x, v(\cdot), \omega) = \min\left\{ l \in \{0, \ldots, n\} : \max_{j=1,\ldots,\nu} \sum_{i=0}^{l} \tilde{\alpha}_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) \ge 1 \right\}, \qquad (6)$$

где $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_\nu)$, $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_\nu\}$.

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном l, $l \in \{0, \ldots, n\}$, положим $k = n + 1$.

Определим разрешающие функции [5]. Пусть $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \in M_j$ для некоторого j. Тогда положим

$$\alpha_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) = \frac{1}{n+1}, \; i = 0, \ldots, n.$$

Пусть теперь $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \notin M_j$ и $0 < k < n$. Тогда положим

$$\alpha_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j), & i = 0, \ldots, k-1, \\ 1 - \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_{lj}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j), & i = k, \\ 0, \quad i = k+1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (7)$$

Отдельно рассмотрим случаи, когда $k = 0$, $k = n$ и $k = n + 1$. Если $\xi_j(n, x_j, \omega_j) \notin M_j$ и $k = 0$, тогда

$$\alpha_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)=\begin{cases}1, & i=0,\\ 0, & i=1,\dots,n.\end{cases} \qquad (7')$$

Если же $\xi_j(n,x_j,\omega_j)\notin M_j$ и $k=n$, тогда

$$\alpha_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)=\begin{cases}\tilde{\alpha}_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j), & i=0,\dots,n-1,\\ 1-\sum\limits_{l=0}^{n-1}\tilde{\alpha}_{lj}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j), & i=n.\end{cases} \qquad (7'')$$

В случае, когда $\xi_j(n,x_j,\omega_j)\notin M_j$ и $k=n+1$ будем полагать

$$\alpha_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)=\tilde{\alpha}_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j),\ i=0,\dots,n. \qquad (7''')$$

Из определения разрешающей функции в частности следует, что функция $\alpha_{0j}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)$ не зависит от управления убегающего, т. е. $\alpha_{0j}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)=\alpha_{0j}(n,x_j,\omega_j)$.

Лемма 1. Пусть для системы (1), (3) с импульсным управлением преследователей (2) выполнено условие 2, при некотором j, $j\in\{1,\dots,\nu\}$, множества M_j, U_j выпуклы и $\xi_j(n,x_j,\omega_j)\notin M_j$. Тогда

$$\alpha_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)[M_j-\xi_j(n,x_j,\omega_j)]\cap[W_{ij}(n,v(\cdot))-w_{ij}(n)]\neq\varnothing \qquad (8)$$

для всех $n=0,1,2,\dots$, $i=0,\dots,n$, $x_j\in R^{m_j}$, $v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_n]$, $w_{ij}(n)\in W_{ij}(n)$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству соответствующей леммы в [4].

Введем также функцию

$$N(x,\omega)=\min\left\{n\in\{0,1,2,\dots\}:\ \inf_{v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_n]}\ \max_{j=1,\dots,\nu}\sum_{i=0}^{n}\alpha_{ij}(n,x_j,v(\cdot),\omega_j)=1\right\}.$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n, положим $N(x,\omega)=+\infty$.

Теорема. Пусть для системы (1) при импульсном управлении преследователей (2) выполнено условие 2, множества M_j и U_j выпуклы, для начальных состояний $x^0=\mathrm{col}(x_1^0,\dots,x_\nu^0)$ и некоторых наборов $\omega=\{\omega_1,\dots,\omega_\nu\}$ выполнено соотношение $N(x^0,\omega)<+\infty$. Тогда хотя бы для одного j траектория системы (1) может быть приведена из начального состояния x^0 на соответствующее терминальное множество M_j^* в момент $\tau_{N(x^0,\omega)}$.

Доказательство. Положим $N=N(x^0,\omega)$ и зафиксируем некоторую функцию $v(\cdot)$, $v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_N]$.

Рассмотрим вначале случай, когда $\xi_j(N,x_j^0,\omega_j)\notin M_j$ для всех $j=1,\dots,\nu$.

Пусть $K = k(N, x^0, v(\cdot), \omega)$, согласно (6), (7) – (7‴)

$$\max_{j=1,\dots,\nu} \sum_{i=0}^{K} \alpha_{ij}(N, x_j^0, v(\cdot), \omega_j) = 1 . \tag{9}$$

Рассмотрим множества

$$U_{0j} = \{u_{0j} \in U_j : \pi_j e^{A_j(\tau_N - \tau_0)} B_j u_{0j} - w_{0j}(N) \in$$
$$\in \alpha_{0j}(N, x_j^0, v(\cdot), \omega_j)[M_j - \xi_j(N, x_j^0, \omega_j)]\} , \tag{10}$$

$$U_{ij} = \left\{ u_{ij} \in U_j : \pi_j e^{A_j(\tau_N - \tau_i)} B_j u_{ij} - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi_j e^{A_j(\tau_N - \vartheta)} C_j v(\vartheta) d\vartheta - w_{ij}(N) \in \right.$$
$$\left. \in \alpha_{ij}(N, x_j^0, v(\cdot), \omega_j)[M_j - \xi_j(N, x_j^0, \omega_j)] \right\} , \tag{11}$$

где $i = 1,\dots,K$, $j = 1,\dots,\nu$. Эти множества непусты в силу условия 2, определения разрешающих функций (7) – (7‴) и леммы 1.

Для $i = 0,\dots,K$ выберем векторы скачков u_{ij} из множеств U_{ij}:

$$u_{ij} \in U_{ij} ,\ i = 0,\dots,K ,\ j = 1,\dots,\nu . \tag{12}$$

Из равенства (9) следует, что найдется такой номер j^*, $j^* \in \{1,\dots,\nu\}$, для которого

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_{ij^*}(N, x_{j^*}^0, v(\cdot), \omega_{j^*}) = 1 . \tag{13}$$

В качестве векторов скачков u_{ij^*} для $i = K+1,\dots,N$ возьмем решения уравнений:

$$\pi_{j^*} e^{A_{j^*}(\tau_N - \tau_i)} B_{j^*} u_{ij^*} - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi_{j^*} e^{A_{j^*}(\tau_N - \vartheta)} C_{j^*} v(\vartheta) d\vartheta - w_{ij^*}(N) = 0 . \tag{14}$$

Управления остальных преследователей при $i = K+1,\dots,N$ выберем произвольными.

Если же для некоторого j^* $\xi_{j^*}(N, x_{j^*}^0, \omega_{j^*}) \in M_{j^*}$, то в качестве вектора u_{0j^*} возьмем решение уравнения

$$\pi_{j^*} e^{A_{j^*}(\tau_N - \tau_0)} B_{j^*} u_{0j^*} - w_{0j^*}(N) = 0 .$$

В качестве управлений j^*-го преследователя при $i=1,\dots,N$ возьмем решения уравнений (14), а управления остальных преследователей положим произвольными.

Рассмотрим случай $\xi_j(N,x_j^0,\omega_j)\notin M_j$ для всех $j=1,\dots,\nu$. Проследим за преследователем j^*. Из формулы Коши и свойств дельта-функции для j^*-го преследователя имеем

$$\pi_{j^*}x_{j^*}(\tau_N)=\pi_{j^*}e^{A_{j^*}(\tau_N-\tau_0)}x_{j^*}^0+\pi_{j^*}e^{A_{j^*}(\tau_N-\tau_0)}B_{j^*}u_{0j^*}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\pi_{j^*}e^{A_{j^*}(\tau_N-\tau_i)}B_{j^*}u_{ij^*}-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\pi_{j^*}e^{A_{j^*}(\tau_N-\vartheta)}C_{j^*}v(\vartheta)d\vartheta\right]. \tag{15}$$

Прибавим и вычтем из правой части этого равенства величину $\sum_{i=0}^{N}w_{ij^*}(N)$. Тогда, учитывая законы выбора управлений преследователями (10) – (14), получаем включение

$$\pi_{j^*}x_{j^*}(\tau_N)\in\xi_{j^*}(N,x_{j^*}^0,\omega_{j^*})+\sum_{i=0}^{K}\alpha_{ij^*}(N,x_{j^*}^0,v(\cdot),\omega_{j^*})[M_{j^*}-\xi_{j^*}(N,x_{j^*}^0,\omega_{j^*})].$$

Отсюда с учетом равенства (13) вытекает включение $\pi_{j^*}x_{j^*}(\tau_N)\in M_{j^*}$.

Если для некоторого j^* $\xi_{j^*}(N,x_{j^*}^0,\omega_{j^*})\in M_{j^*}$, то, учитывая закон выбора управления в этом случае, выражение для $\xi_{j^*}(N,x_{j^*}^0,\omega_{j^*})$ и формулу (15), получаем включение $\pi_{j^*}x_{j^*}(\tau_N)\in M_{j^*}$. Теорема доказана.

Пример: групповое преследование с простым движением. Рассмотрим задачу группового преследования с ν преследователями

$$\dot y_j=u_j,\quad y_j\in R^m,\quad m>1,\quad j=1,\dots,\nu \tag{16}$$

и одним убегающим

$$\dot z=v,\ z,v\in R^m. \tag{17}$$

Предположим, что $\tau_i=iP$, $P>0$, где P – некоторый период, тогда условие 1 выполнено и управления преследователей имеют вид

$$u_j(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_{ij}\delta(t-iP).$$

Будем полагать, что векторы скачков u_{ij}, $u_{ij}\in R^m$, принадлежат замкнутому шару единичного радиуса с центром в нуле, а управление убегающего

$v = v(t)$ является измеримой функцией со значениями из шара радиуса $\frac{1}{P}$, т. е. $u_{ij} \in S$, $i = 0,1,2,\dots$, $j = 1,\dots,\nu$, $v \in \frac{1}{P}S$, где $S = \{x \in R^m : \| x \| \le 1\}$.

Игра считается законченной, если $y_j = z$ для некоторого j. Приведем эту задачу к виду (1). Для этого положим $x_j = y_j - z$. Тогда вместо уравнений (16), (17) получаем систему

$$\dot{x}_j = u_j - v,\ x_j \in R^m,\ j = 1,\dots,\nu, \tag{18}$$

с терминальным множеством

$$M_j^* = M_j^0 = M_j = \{0\},\ j = 1,\dots,\nu.$$

В данном случае $L_j = R^m$, а π_j – оператор тождественного преобразования, который задается m-мерной единичной матрицей. Матрицы A_j являются m-мерными нуль-матрицами, а $e^{A_j t}$ – m-мерные единичные матрицы. Матрицы B_j, C_j также представляют собой m-мерные единичные матрицы. Проверим условие 2:

$$W_{0j}(n) = W_{0j} = S,$$

$$W_{ij}(n, v(\cdot)) = S - \int_{(i-1)P}^{iP} v(\vartheta)d\vartheta,$$

$$W_{ij}(n) = W_{ij} = S \overset{*}{-} P\frac{1}{P}S = S \overset{*}{-} S = \{0\},$$

где $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,\nu$. Таким образом условие 2 выполнено, поскольку множества W_{ij} всегда содержат нулевой вектор. Положим $w_{ij}(n) \equiv 0$. Тогда

$$\xi_j(n, x_j, \omega_j) = x_j,\ j = 1,\dots,\nu$$

и разрешающие функции имеют вид

$$\alpha_{0j}(n, x_j, \omega_j) = \alpha_{0j}(x_j) = \sup\{\alpha \ge 0 : -\alpha x_j \in S\} = \frac{1}{\| x_j \|},$$

$$\alpha_{ij}(n, x_j, v(\cdot), \omega_j) = \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) = \sup\left\{\alpha \ge 0 : -\alpha x_j \in S - \int_{(i-1)P}^{iP} v(\vartheta)d\vartheta\right\},$$

где $i=1,\ldots,n$. Введем обозначение $\psi_i = \int\limits_{(i-1)P}^{iP} v(\vartheta)d\vartheta$. Нетрудно видеть, что функции $\alpha_{ij}(x_j, v(\cdot))$ являются большими корнями квадратных уравнений $\|\psi_i - \alpha x_j\| = 1$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,\nu$, и имеют вид

$$\alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) = \frac{(x_j,\psi_i) + \sqrt{(x_j,\psi_i)^2 + \|x_j\|^2 (1-\|\psi_i\|^2)}}{\|x_j\|^2},\ i=1,\ldots,n.$$

Номер скачка, на котором завершается групповое преследование, определяется выражением

$$N(x,\omega) = N(x) = \min\left\{ n\in\{0,1,2,\ldots\} : \inf_{v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_n]} \max_{j=1,\ldots,\nu} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) = 1 \right\}.$$

Оценим величину $N(x)$. Допустим, что для некоторого j справедливо неравенство $\alpha_{0j}(x_j) \geq 1$. В таком случае $\|x_j\| \leq 1$ и игра может быть закончена в начальный момент τ_0.

Предположим теперь, что $\max\limits_{j=1,\ldots,\nu} \alpha_{0j}(x_j) < 1$. Это означает, что

$$\|x_j\| > 1,\ j=1,\ldots,\nu.$$

Обозначим

$$\alpha_j(x_j,\psi) = \frac{(x_j,\psi) + \sqrt{(x_j,\psi)^2 + \|x_j\|^2 (1-\|\psi\|^2)}}{\|x_j\|^2},\ j=1,\ldots,\nu,$$

где ψ – m-мерный вектор, принадлежащий единичному шару. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\inf_{v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_n]} \max_{j=1,\ldots,\nu} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) = \inf_{v(\cdot)} \max_{j=1,\ldots,\nu} \left(\alpha_{0j}(x_j) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) \right) =$$

$$= \inf_{v(\cdot)} \max_{\rho\in\Sigma} \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \left(\alpha_{0j}(x_j) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) \right) \geq$$

$$\geq \inf_{v(\cdot)} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu} \left(\alpha_{0j}(x_j) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) \right) =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\|x_j\|} + \frac{1}{\nu}\inf_{v(\cdot)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) \geq \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\|x_j\|} + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\inf_{v(\cdot)}\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}(x_j, v(\cdot)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\|x_j\|} + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\min_{\|\psi\|\leq 1}\max_{j=1,\ldots,\nu}\alpha_j(x_j,\psi) = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\|x_j\|} + \frac{n}{\nu}\zeta(x).$$

Здесь Σ – $(\nu-1)$-мерный симплекс, а $\zeta(x)=\min\limits_{\|\psi\|\le 1}\max\limits_{j=1,\ldots,\nu}\alpha_j(x_j,\psi)$. Таким образом,

$$\inf_{v(\cdot)\in V[\tau_0,\tau_n]}\max_{j=1,\ldots,\nu}\sum_{i=0}^{n}\alpha_{ij}(x_j,v(\cdot))\ge\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\|x_j\|}+\frac{n}{\nu}\zeta(x)$$

откуда следует оценка для $N(x)$:

$$N(x)\le\frac{\nu-\sum\limits_{j=1}^{\nu}\dfrac{1}{\|x_j\|}}{\zeta(x)}.$$

Так как по определению $\zeta(x)\ge 0$ для всех $x\in R^{\nu m}$, то для того, чтобы гарантировать конечность времени группового преследования, необходимо определить те состояния x, для которых $\zeta(x)>0$.

Положим $\sigma(x)=\min\limits_{\|\psi\|=1}\max\limits_{j=1,\ldots,\nu}\left(\dfrac{x_j}{\|x_j\|},\psi\right)$. Легко видеть, что $\sigma(x)>0$ тогда и только тогда, когда $\zeta(x)>0$. Действительно, если $\sigma(x)>0$, то рассмотрев отдельно случаи $\|\psi\|=0$ и $\|\psi\|=1$, получаем $\zeta(x)>0$. Если $\zeta(x)>0$, то, в частности, $\min\limits_{\|\psi\|=1}\max\limits_{j=1,\ldots,\nu}\alpha_j(x_j,\psi)>0$, откуда следует неравенство $\sigma(x)>0$. С другой стороны, справедливо утверждение.

Лемма 2. Функция $\sigma(x)>0$ тогда и только тогда, когда нуль пространства R^m принадлежит внутренности выпуклой оболочки, натянутой на векторы $\dfrac{x_j}{\|x_j\|}$, $j=1,\ldots,\nu$:

$$0\in\operatorname{int}\operatorname{co}\left\{\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\}.$$

При доказательстве данной леммы используются свойства опорных функций.

Следствие 1. $0\notin\operatorname{int}\operatorname{co}\left\{\dfrac{x_j}{\|x_j\|}\right\}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x)\le 0$.

Следствие 2. Пусть x^0 – начальное состояние системы (18). Преследование может быть закончено за конечное время тогда и только тогда, когда справедливо включение

$$0\in\operatorname{int}\operatorname{co}\left\{\frac{x_j^0}{\|x_j^0\|}\right\}.$$

Заключение. Полученные результаты показывают, что правило «окружения», известное для дифференциальных игр с непрерывной динамикой, применимо также и в случае разрывных траекторий.

Развитие данной работы будет направлено на изучение задач группового преследования убегающего, обладающего импульсным управлением.

Будет исследована эффективность предложенных подходов при решении модельных примеров и конкретных практических задач.

Ю.Г. Кривонос, І.І. Матичин, К.А. Чикрій

ГРУПОВЕ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ
З ІМПУЛЬСНИМ КЕРУВАННЯМ

Розглядається задача переслідування групою керованих об'єктів одного утікача за припущення, що керування переслідувачів має імпульсний характер. На основі методу розв'язувальних функцій одержано достатні умови піймання. Для випадку простих рухів сформульовано необхідну і достатню умову піймання, аналогічну відомому правилу "оточення".

Yu.G. Krivonos, I.I. Matychyn, K.A. Chikrii

GROUP PURSUIT IN DIFFERENTIAL GAMES WITH IMPULSE CONTROL

A problem of pursuit of an evader by multiple controlled objects is considered. Controls of pursuers are supposed to be impulsive. On the basis of the Method of Resolving Functions, sufficient conditions for capture are derived. For the case with simple motion dynamics, necessary and sufficient condition for capture is formulated that is analogous to the well-known "encirclement" rule.

1. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Об одном классе игровых задач с импульсным управлением // Доп. НАН України. – 2004. – № 6. – С. 73–77.
2. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением убегающего // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 80–85.
3. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Дифференциальные игры с импульсным управле- нием // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2004. – С. 102–107.
4. *Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А.* Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 6. – С.15–29.
5. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
6. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Киберне- тика. – 1976. – № 3. – С. 145–146.

Получено 08.02.2005