УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ

# ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

*Предлагается эффективный алгоритм для решения системы линейных неравенств. В основе алгоритма лежит процедура сечения симплекса плоскостью и погружения полученного “полусимплекса” в новый симплекс минимального объема. Представлены результаты численного эксперимента.*



**Введение**. Для минимизации ограниченной снизу выпуклой функции в пространстве $R^n$ разработан метод центрированных сечений [1], который основан на том, что используя информацию о локализации минимума в некотором выпуклом замкнутом многограннике, находить на каждой итерации алгоритма центр тяжести данного многогранника и вычислять субградиент функции в данной точке. Минимум функции будет находиться в одном из полупространств, определяемых опорной гиперплоскостью. Часть многогранника, лежащую в другом полупространстве, можно отсечь. С полученным новым многогранником поступаем аналогично.

Метод центрированных сечений практически непригоден, поскольку вычисление центра тяжести многомерного многогранника является неконструктивной процедурой. Весьма эффективной оказалась идея замены многогранника на эллипсоид [2]. В работе [3] была осуществлена замена многогранника симплексом и получен метод центров тяжести симплексов для решения экстремальной задачи. Для быстрой сходимости указанного метода необходимо простым способом вычислять последовательность симплексов, содержащих очередную неотсеченную область – «полусимплекс». Кроме того отношение объемов двух последовательных симплексов должно быть меньше единицы.

Известно, что центр тяжести позволяет осуществлять гарантированное уменьшение объема симплекса [4]. Однако, в качестве очередного приближения наряду с центром тяжести может быть выбран центр шара максимального радиуса, вписанного в симплекс. Рассмотрению способов эффективного управления уменьшением объемов симплексов и выбора некоторых характерных точек симплексов в качестве приближений решения системы линейных неравенств посвящена данная работа.

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$(a_i, x) + \alpha_i \le 0, \quad i = 1,..., m, \tag{1}$$

определяющую многогранник $\mathbf{\Omega}$ с непустой внутренностью. Требуется найти точку $\tilde{x} \in \mathbf{\Omega}$. Предполагаем, что существует произвольный $n$ –мерный симплекс $S_{-1}$, натянутый на вершины $x^0, x^1,..., x^n$ и содержащий $\mathbf{\Omega}$.

Пусть $\bar{x}$ – центр тяжести симплекса $S_{-1}$ и задана некоторая плоскость $(a, x) + \alpha = 0$, такая, что $(a, \bar{x}) + \alpha > 0$. Далее рассмотрим процедуру $V(\bar{x}; a, \alpha)$, ставящую в соответствие симплексу $S_{-1}$ симплекс $S_1$ минимального объема, содержащий “полусимплекс” $S_0 = \{x \in S_{-1} : (a, x) + \alpha \le 0\}$.

Пусть $(b_j, x) + \beta_j = 0$, $j = 0,1,..., n$, нормальное уравнение плоскости, содержащей грань симплекса $S_{-1}$, противолежащую вершине $x^j$ данного симплекса. Тогда $S_0$ можно представить так:

$$S_0 = \{\ x : (b_j, x) + \beta_j \le 0,\ \ j = 0, 1,..., n,\ \ (a, x) + \alpha \le 0\ \}.$$

Погружение “полусимплекса” $S_0$ в симплекс осуществляется следующим образом. Вначале определяем все вершины исходного симплекса, удовлетворяющие отсекающему неравенству. Пусть для определенности $(a, x^j) + \alpha \le 0$, $j = 0, 1,..., k$, и вершина $x^0$ наиболее удалена от отсекающей плоскости. Для $\theta \in [0,1]$ построим гиперплоскость

$$\theta[(a, x) + \alpha] + (1 - \theta)[(a, x^0) + \alpha][(b_0, x) + \beta_0] \big/ [(b_0, x^0) + \beta_0] = 0.$$

Вычисляем координаты точек пересечения $y^j(\theta)$, $j = 1,..., n$, с этой гиперплоскостью ребер симплекса $S_{-1}$, исходящих из вершины $x^0$, т.е. находим вершины симплекса, определяемого неравенствами $(b_j, x) + \beta_j \le 0$, $j = 1,..., n$, и неравенством

$$\theta[(a, x) + \alpha] + (1 - \theta)[(a, x^0) + \alpha][(b_0, x) + \beta_0] \big/ [(b_0, x^0) + \beta_0] \le 0,$$

содержащего $S_0$. Нетрудно проверить, что

$$y^j(\theta) = x^0 + (x^j - x^0) \big/ (1 - \delta_j \theta), \quad \delta_j = [(a, x^j) + \alpha] \big/ [(a, x^0) + \alpha], \quad j = 1,..., n.$$

Процедура $V(\bar{x}; a, \alpha)$, завершается вычислением на отрезке $[0,1]$ минимума функции $\varphi(\theta) = c \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\delta_j \theta}$, $c > 0$.

Оценка сверху для минимума $\varphi(\theta)$ зависит от величины $\Delta = \sum_{j=1}^{k} \delta_j$. Сказанное следует понимать так: если имеется несколько плоскостей, отделяющих центр тяжести $\bar{x}$, то для сечения симплекса следует выбрать ту, которой соответствует меньшая величина $\Delta$. Процедуру построения гиперплоскости $(a, x) + \alpha = 0$ в соответствии с описанным правилом обозначим $H1(\bar{x})$.

Для описания следующей процедуры $H2(\bar{x})$ построения отсекающей гиперплоскости предположим, что $(a_i, \bar{x}) + \alpha_i > 0$, $i = 1,...,m_0$. На первом шаге вначале полагаем $c_1 = a_1$, $\gamma_1 = \alpha_1$, $c_2 = a_2$, $\gamma_2 = \alpha_2$ и рассматриваем отсекающее неравенство как выпуклую комбинацию первых двух нарушенных неравенств $\theta[(c_1, x) + \gamma_1] + (1-\theta)[(c_2, x) + \gamma_2] \le 0$, $\theta \in [0,1]$.

Далее строим функцию

$$\Delta(\theta) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \left| \theta[(c_1, x^j) + \gamma_1] + (1-\theta)[(c_2, x^j) + \gamma_2] \right| - g \right\} \Big/$$

$$\Big/ \max_{0 \le j \le n} -\left( \theta[(c_1, x^j) + \gamma_1] + (1-\theta)[(c_2, x^j) + \gamma_2] \right),$$

где $g = \sum_{j=0}^{n} \left( \theta[(c_1, x^j) + \gamma_1] + (1-\theta)[(c_2, x^j) + \gamma_2] \right)$.

Определяем параметр $\theta^* = \arg \min \left\{ \Delta(\theta) \;\middle|\; \theta \in [0,1] \right\}$ и полагаем направляющий вектор $a^* = \theta^* c_1 + (1-\theta^*) c_2$ и свободный член уравнения отсекающей гиперплоскости $\alpha^* = \theta^* \gamma_1 + (1-\theta^*) \gamma_2$.

Несмотря на сложный вид функции $\Delta(\theta)$, значение параметра $\theta^*$ легко вычисляется. Оно совпадает или с одним из концов указанного отрезка, или с корнем одного из слагаемых, стоящих под знаком модуля в числителе этого выражения.

На втором шаге полагаем $c_1 = a^*$, $\gamma_1 = \alpha^*$, $c_2 = a_3$, $\gamma_2 = \alpha_3$ и повторяем все описанные действия. Процедура $H2(\bar{x})$ продолжается до тех пор, пока не будут перебраны все $m_0$ нарушенные неравенства. Последняя выпуклая комбинация даст искомую отсекающую гиперплоскость.

Для описания процедуры $H3(\bar{x})$ также будем предполагать, что в точке $\bar{x}$ нарушены первые $m_0$ неравенств. Полагаем

$$\lambda_i = [(a_i, \bar{x}) + \alpha_i] \Big/ \sum_{k=1}^{m_0} [(a_k, \bar{x}) + \alpha_k], \quad i = 1, \ldots, m_0 .$$

Тогда для нормали $a$ и свободного члена $\alpha$ отсекающей гиперплоскости получаем следующие выражения: $a = \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i a_i$ , $\alpha_i = \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i \alpha_i$ .

Рассмотрим три процедуры отыскания очередного приближения. Процедура $P1(S)$ ставит в соответствие симплексу $S$ его центр тяжести $\bar{x}$. Процедура $P2(S)$ ставит в соответствие симплексу $S$ его чебышевский центр

$$€ = \arg\min \left\{ \max_{z \in S} \|x - z\| \,\Big|\, x \in R^n \right\} .$$

Для отыскания чебышевского центра € исходного симплекса $S_{-1}$ достаточно решить соответствующую систему уравнений. На всех последующих шагах расчеты значительно проще. Действительно, центр шара, вписанного в $S_1$, следует искать на луче $x^0 + (€ - x^0)\,\tau$, $\tau \geq 0$. Поэтому достаточно найти решение $\tau_0$ уравнения

$$\left(b_1, x^0 + (€ - x^0)\;\tau\right) + \beta_1 = \left(b_0, x^0 + (€ - x^0)\;\tau\right) + \beta_0 ,$$

где $(b_0, x) + \beta_0 = 0$ – нормальное уравнение плоскости, содержащей грань симплекса $S_1$, противолежащей вершине $x^0$, а затем положить $€ := x^0 + (€ - x^0)\tau_0$.

Процедура $P3(S)$ состоит из $n$ шагов. На первом шаге полагаем $€ := \bar{x}$, $z := x^1$ и находим

$$\theta^* = \arg\ \min\ \left\{\ \max_i\ \left([a_i, \theta€ + (1-\theta)z] + \alpha_i\right)\ \Big|\ \theta \in [0,1]\ \right\}. \tag{2}$$

Далее полагаем $€ := \theta^* € + (1 - \theta^*)z$, $z := x^2$ и решаем вновь задачу (2). Завершается процедура $P3(S)$ построением некоторой точки € на $n$ -й итерации.

Перейдем теперь к непосредственной формулировке алгоритма для решения системы (1). Пусть точки $\bar{x} = P1(S_{-1})$, $€ = P2(S_{-1})$ и $€ = P3(S_{-1})$ не принадлежат $\Omega$ (иначе, система (1) решена). Применяя процедуру $H1(\bar{x})$, либо $H2(\bar{x})$, либо $H3(\bar{x})$ находим отсекающую гиперплоскость $(a, x) + \alpha = 0$. Осуществляем процедуру $V(\bar{x}; a, \alpha)$, т.е. находим новый симплекс $S_1 \supset \mathbf{\Omega}$, объем которого меньше объема исходного симплекса $S_{-1}$. Описанные шаги повторяются. Поскольку $\operatorname{int} \mathbf{\Omega} \neq \varnothing$, то за конечное число итераций модифицированный метод решит систему (1).

Если $\mathrm{int}\,\mathbf{\Omega} = \varnothing$, то на некоторой итерации может быть получен симплекс нулевого объема, но не получено решение задачи, т. е. вычислительный процесс завершается безрезультатно. Требуется найти некоторую точку в многограннике

$$\mathbf{\Omega} = \left\{ x : -\xi_1 - 2\xi_2 - 1 \le 0;\ \xi_1 + 1 \le 0;\ -\xi_1 + \xi_2 - 1 \le 0 \right\} \in R^2 .$$

В качестве исходного берем симплекс $S_0$ с вершинами $(0;10)$, $(-10;-20)$, $(10;-20)$. Тогда $S_0 \supset \mathbf{\Omega}$, $\mathrm{int}\,\mathbf{\Omega} = \varnothing$.

На первой итерации центр симплекса $S_0$ не удовлетворяет неравенствам с номерами $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ и $\lambda^* = 0{,}1552$. Выпуклая комбинация первых двух плоскостей, определяющих $\mathbf{\Omega}$, с использованием найденного значения $\lambda^*$ дает отсекающую плоскость $\xi_1 - 0{,}45005\xi_2 + 1 = 0$. Таким образом будет построен симплекс $S_1$ с вершинами $(0;\ 10)$, $(-10;-20)$, $(1{,}4894;\ 5{,}5319)$, причем $vol(S_1)/vol(S_0) = 0{,}1489$. На второй итерации $i_1 = 3$, $i_2 = 1$, $\lambda^* = 0{,}8166$. Выпуклая комбинация с данным $\lambda^*$ третьей и первой плоскости, определяющих $\mathbf{\Omega}$, дает отсекающую плоскость $-\xi_1 + 0{,}45005\xi_2 - 1 = 0$. В качестве симплекса $S_2$ получаем отрезок с концами $(-10;-20)$, $(1{,}4894;\ 5{,}5319)$, то есть $vol(S_2) = 0$. Алгоритм закончил работу, однако, единственная точка $(-1;0) \in \Omega$ не найдена.

Заметим, что в качестве исходного симплекса $S_{-1}$ можно брать симплекс, удовлетворяющий более слабому требованию $S_{-1} \cap \mathbf{\Omega} \ne \varnothing$.

**Пример.** Требуется найти решение системы неравенств (1) с числовыми данными, представленными в таблице. Здесь $x \in R^{15}$, число неравенств $m = 14$. В качестве исходного симплекса берем $S_{-1} = \left\{ x : x \ge 0,\ \sum_{q=1}^{15} \xi_q \le 3 \right\}$. На очередной итерации построение отсекающей гиперплоскости производилось с помощью процедур $H1(\bar{x})$ или $H2(\bar{x})$. В первом случае решение получено при $k = 86$, $vol(S_{86})/vol(S_{85}) = 0{,}99774$, $\tilde{x} = \bar{x} =$ (–0,76881; 0,29741; 0,85762; 0,09701; 0,04513; 0,05111; 0,10333; 0,15089; 0,13279; 0,34197; 0,02528; 0,71540; 0,06160; 0,54511; 0,25700), во втором – при $k = 34$, $vol(S_{34})/vol(S_{33}) =$ 0,99579, $\tilde{x} = \bar{x} =$ (0,79970; 0,15279; 0,61331; –0,06312; 0,21261; 0,06889; 0,05470; 0,09169; 0,01581; 0,43580; 0,03071; 0,02301; 0,04400; 0,15569; 0,25390).

**Замечание**. Если на каждом шаге итерационного процесса с использованием процедуры $P1(S)$ отсекаются все вершины, кроме одной, то объем симплексов, в которых локализована точка $\tilde{x}$, уменьшается в два раза, т.е. осуществляется процесс дихотомии.

ТАБЛИЦА

| $a_i$ / $i$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ | $\xi_4$ | $\xi_5$ | $\xi_6$ | $\xi_7$ | $\xi_8$ | $\xi_9$ | $\xi_{10}$ | $\xi_{11}$ | $\xi_{12}$ | $\xi_{13}$ | $\xi_{14}$ | $\xi_{15}$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | 2 | -3 | 0 | 2 | -1 | 3 | -1 | -2 | -5 | 1 | 1 | 2 | -3 | 1 |
| 2 | -1 | -2 | 3 | -5 | 2 | -1 | 2 | -4 | 6 | -7 | 0 | -5 | 4 | 3 | 2 | -0,7 |
| 3 | 0 | 3 | -1 | 2 | -3 | 0 | 5 | -5 | 6 | 8 | 1 | 0 | -1 | -2 | 4 | 3,3 |
| 4 | 2 | 1 | -3 | 4 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 2 | -3 | 2 | 0 | 5 | 8 | 3,2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | -1 | -3 | -5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2,8 |
| 6 | 0 | 0 | -1 | -2 | -3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | -2 | 1 | -0,5 |
| 7 | -1 | -1 | -2 | -3 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2 | -4 | 5 | 6 | -4 | -1,5 |
| 8 | -1 | 1 | -2 | 3 | 0 | -2 | 1 | -3 | 1 | 2 | 5 | -1 | -1 | -2 | 3 | -0,8 |
| 9 | 1 | 2 | -3 | 5 | -2 | 1 | -2 | 4 | -6 | 7 | 0 | 5 | -4 | -3 | -2 | 0,9 |
| 10 | 0 | -3 | 1 | -2 | 3 | 0 | -5 | 5 | -6 | -8 | -1 | 0 | 1 | 2 | -4 | -3,1 |
| 11 | -2 | -1 | 3 | -4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 | 3 | -2 | 0 | -5 | -8 | -3,0 |
| 12 | -1 | -2 | -3 | 1 | 3 | 5 | -6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -2,6 |
| 13 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | -3 | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | -2 | 2 | -1 | 0,7 |
| 14 | 1 | 1 | 2 | 3 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | 4 | -5 | -6 | 4 | 1,9 |

**Заключение**. Исследуемый алгоритм, вообще говоря, не улучшает теоретическую оценку скорости сходимости метода центров тяжести симплексов. Однако при решении конкретных задач предложенные варианты алгоритма существенно уменьшают число итераций.

*Е.І. Ненахов*

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ПОШУКУ РІШЕНЬ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Пропонується ефективний алгоритм для розв′язування системи лінійних нерівностей. У основі алгоритму лежить процедура відтинання симплексу площиною та занурення отриманого “напівсимплексу” в новий симплекс мінімалного об′єму. Наведені результати обчислювального експерименту.

*E.I. Nenakhov*

AN ONE ALGORITHM FOR FINDING SOLUTION TO A LINEAR INEQUALITY SYSTEM

An efficient algorithm for finding a solution to system of linear inequalities is proposed. It is based on the procedure of cutting a simplex by a plane and of embedding an obtained “semisimplex ” into a new simplex of minimal volume. The computational experiment results are provided.

1. *Левин А.Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 6. – С. 1244 –1247.
2. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их применение. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
3. *Александров И.А., Анциферов Е.Г., Булатов В.П.* Методы центрированных сечений в выпуклом программировании. – Иркутск, 1983. – 33 с. – (Препр. / АН СССР, Сиб. отд. – ние. Сиб. энергетический ин–т; № 5).
4. *Митягин Б.С.* Два неравенства для объемов выпуклых тел // Математические заметки. – 1969. – **5**, вып. 1. – С. 99 – 106.

Получено 25.02.2005