УДК 519.1

Д.А. ПЕТРЕНЮК

ІСНУВАННЯ КУБІЧНИХ РОЗКЛАДІВ ГРАФА K_{13}

Розв'язується задача розкладу повних графів на множину регулярних під графів, зокрема на кубічні. За допомогою комп'ютерних обчислень уперше знайдено кількість типів такого розкладу повних графів з 13, 16 та 19 вершинами. Повністю досліджена структура різних типів розкладів повного графа з 13 вершинами.

Регулярним графом степеня k називають граф, у якого степені всіх вершин дорівнюють k. Регулярний граф степеня k=3 називають кубічним графом. Розкладом заданого графа H на підграфи з множини $G=\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ називають розбиття множини ребер цього графа на підграфи (компоненти розкладу), кожен з яких ізоморфний деякому графу з множини G.

Розглянемо умови існування розкладів графа K_n на регулярні компоненти степеня k>2. Відомо, що необхідна умова існування розкладів графа K_n на компоненти, кожна з яких – регулярний граф степеня $k > 2$, має вигляд

$$n \equiv 1(\operatorname{mod} k)\,. \qquad (1)$$

Кількість ребер регулярного графа порядку m степеня k дорівнює $\frac{km}{2}$. Кількість ребер графа K_n визначається виразом $\frac{n(n-1)}{2}$.

Типом розкладу називатимемо вектор $\boldsymbol{a}=\{a_4,a_5,a_6,\ldots,a_n\}$, де a_i – кількість компонент порядку i у розкладі. Тоді повинна виконуватися рівність

$$\sum \frac{ki}{2} a_i = \frac{n(n-1)}{2}\,. \qquad (2)$$

У випадку k = 3 маємо розклад графа K_n на кубічні компоненти. Такий розклад називають кубічним.

Умова (2) для кубічного розкладу матиме вигляд

$$\sum \frac{3i}{2} a_i = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{3}$$

Відомо, що кубічний граф порядку i існує лише у випадку, коли i – парне число, $i \geq 4$. Тоді рівняння (3) можна записати так:

$$2a_4 + 3a_6 + 4a_8 + ... + \frac{n}{2} a_n = \frac{n(n-1)}{6}. \tag{4}$$

При $n = 4$ існує лише од ин розклад графа K_n на кубічні графи. Наступне n, що відповідає умові (1), – $n = 7$. Єдиний можливий тип кубічного розкладу графа K_7 – це $\boldsymbol{a} = \{2, 1\}$ (рис.1). Компоненти єдиної (з точністю до ізоморфізму) реалізації цього типу показано на рис. 1, і цим задача повністю розв'язана.

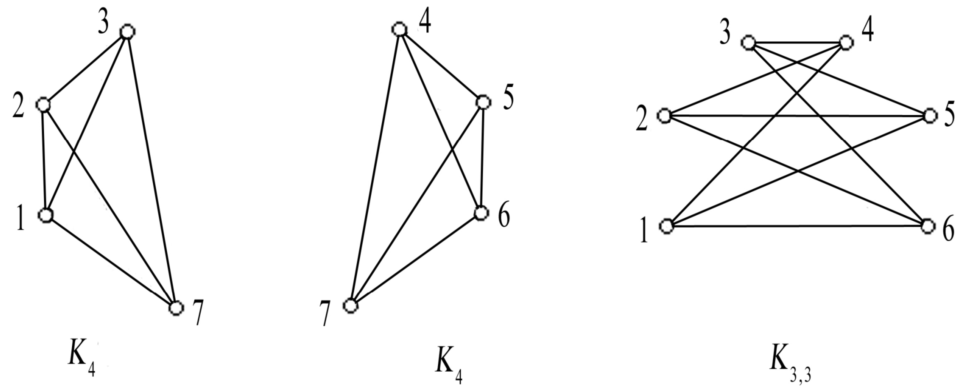

РИС. 1. Компоненти кубічного розкладу графа K_7

Вивчення випадку $n = 10$ започатковано в [1], де опубліковано перелік типів кубічних розкладів графа K_{10}.

Шляхом комп'ютерного перебору автором отримано можливі типи кубічних розкладів графів K_{13}, K_{16} та K_{19}. Для $n = 13$ існує 97 можливих типів, для $n = 16$ їх кількість становить 1161, для $n = 19$ – 9670. Перелік можливих типів для $n = 13$ опубліковано в [2].

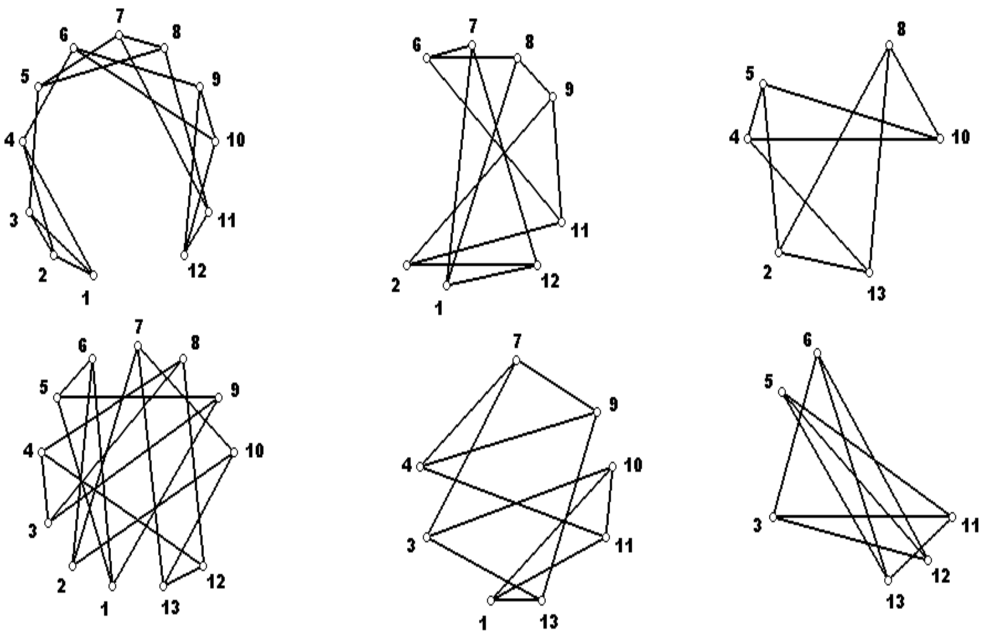

РИС. 2. Розклад графа K_{13} типу {0, 2, 2, 0, 2}

В даній роботі вивчається питання існування кубічних розкладів графа K_{13} для кожного зі згаданих типів. На початку було перевірено існування лише таких розкладів, для яких виконується умова: будь-які дві компоненти одного й того ж порядку ізоморфні. За допомогою комп'ютера отримано кубічні розклади з вказаною властивістю для 50 типів з 97 можливих. Для цього використано переліки кубічних графів порядків 8, 10, 12, наведені в [3]. Після цього для решти 47 типів проведено пошук реалізацій, у яких компоненти однакових порядків не обов'язково ізоморфні. Такі реалізації знайдено для 19 типів. Розв'язок задачі знайдено шляхом повного перебору, отже 28 типів, для яких не знайдено розкладів, не реалізуються взагалі.

Існування чи відсутність розкладів відображено в таблиці. У ній зірочкою позначено типи, для яких знайдено лише реалізації, компоненти одного порядку не обов'язково ізоморфні.

Приклади розкладів подано на рис. 2 та 3. На рис.2 показано розклад типу {0, 2, 2, 0, 2}

1-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-5 4-6 5-7 5-8 6-9 6-10 7-8 7-11 8-11 9-10 9-12 10-12 11-12;

1-5 1-6 1-9 5-6 5-9 6-2 9-3 2-7 2-10 3-4 3-8 7-10 7-13 10-13 4-8 4-12 8-12 13-12;
1-7 1-12 1-8 7-12 7-6 12-2 8-6 8-9 6-11 2-9 2-11 9-11;
1-10 1-11 1-13 10-11 10-3 11-4 13-3 13-9 3-7 4-9 4-7 9-7;
2-8 2-13 2-5 8-13 8-10 13-4 5-4 5-10 4-10;
3-6 3-12 3-11 6-12 6-13 12-5 11-5 11-13 5-13,

у якому компоненти однакових порядків ізоморфні .

На рис.3 показано розклад типу {3,0,1,2,1}

1-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-5 4-5 5-6 6-7 6-8 7-9 7-10 8-9 8-11 9-12 10-11 10-12 11-12;
1-5 1-7 1-8 5-7 5-8 7-2 8-10 2-10 2-6 10-3 6-4 6-9 3-4 3-9 4-9;
1-6 1-10 1-9 6-10 6-11 10-4 9-11 9-2 11-5 4-8 4-12 2-5 2-8 5-12 8-12;
3-7 3-8 3-11 7-8 7-12 8-13 11-1 11-2 12-1 12-2 13-1 13-2;
3-6 3-12 3-13 6-12 6-13 12-13;
4-7 4-11 4-13 7-11 7-13 11-13;
5-9 5-10 5-13 9-10 9-13 10-13.

Тут умова ізоморфності компонент однакових порядків не виконується.

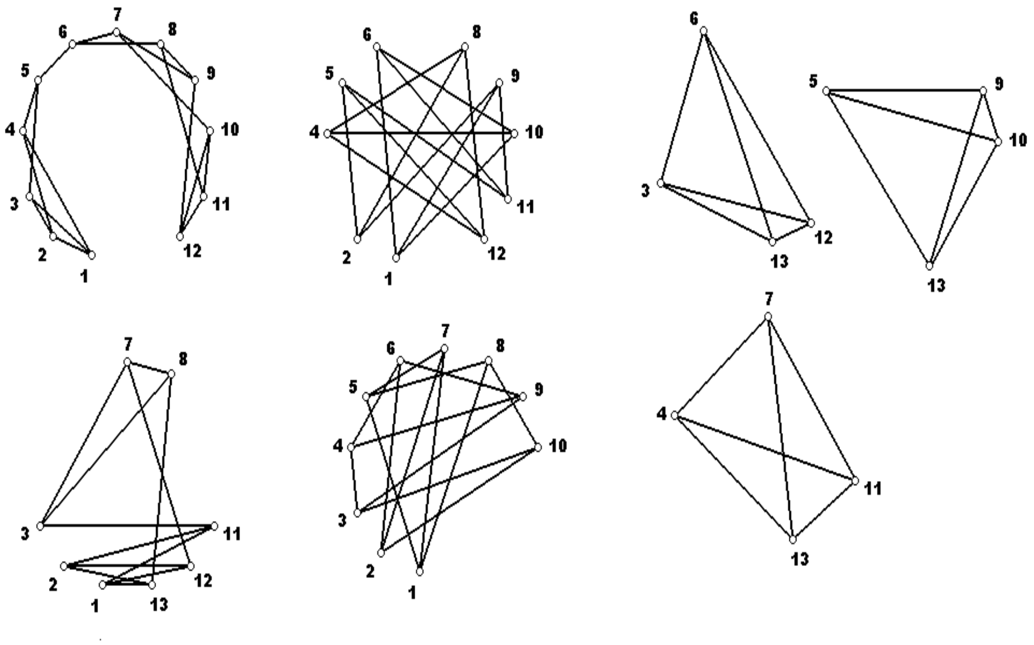

РИС. 3. Компоненти розкладу типу {3,0,1,2,1}

ТАБЛИЦЯ

Номер типу	Тип розкладу	Існування	Номер типу	Тип розкладу	Існування	Номер типу	Тип розкладу	Існування
1	0 0 0 4 1	+	34	1 4 3 0 0	+	67	4 2 0 0 2	–
2	0 0 1 2 2	+	35	1 5 1 1 0	+	*68	4 2 3 0 0	+
3	0 0 2 0 3	+	36	1 6 0 0 1	+	69	4 3 1 1 0	+
4	0 0 4 2 0	+	37	1 8 0 0 0	+	*70	4 4 0 0 1	+
5	0 0 5 0 1	+	38	2 0 0 2 2	+	71	4 6 0 0 0	–
6	0 1 0 1 3	+	*39	2 0 1 0 3	+	72	5 0 0 2 1	–
7	0 1 2 3 0	+	40	2 0 3 2 0	+	73	5 0 1 0 2	–
8	0 1 3 1 1	+	41	2 0 4 0 1	+	74	5 0 4 0 0	–
9	0 2 0 4 0	+	42	2 1 1 3 0	+	75	5 1 2 1 0	–
10	0 2 1 2 1	+	43	2 1 2 1 1	+	76	5 2 0 2 0	–
11	0 2 2 0 2	+	44	2 2 0 2 1	+	77	5 2 1 0 1	–
12	0 2 5 0 0	+	*45	2 2 1 0 2	+	78	5 4 1 0 0	–
13	0 3 0 1 2	+	*46	2 2 4 0 0	+	79	6 0 1 2 0	–
14	0 3 3 1 0	+	47	2 3 2 1 0	+	80	6 0 2 0 1	–
15	0 4 1 2 0	+	48	2 4 0 2 0	+	81	6 1 0 1 1	–
16	0 4 2 0 1	+	49	2 4 1 0 1	+	82	6 2 2 0 0	–
17	0 5 0 1 1	+	*50	2 6 1 0 0	+	83	6 3 0 1 0	–
*18	0 6 2 0 0	+	*51	3 0 0 4 0	+	84	7 0 0 0 2	–
19	0 7 0 1 0	+	*52	3 0 1 2 1	+	85	7 0 3 0 0	–
*20	1 0 0 0 4	+	*53	3 0 2 0 2	+	86	7 1 1 1 0	–
21	1 0 1 4 0	+	*54	3 0 5 0 0	+	87	7 2 0 0 1	–
22	1 0 2 2 1	+	55	3 1 0 1 2	–	88	7 4 0 0 0	–
23	1 0 3 0 2	+	*56	3 1 3 1 0	+	89	8 0 0 2 0	–
*24	1 0 6 0 0	+	57	3 2 1 2 0	+	90	8 0 1 0 1	–
25	1 1 0 3 1	+	58	3 2 2 0 1	+	91	8 2 1 0 0	–
26	1 1 1 1 2	+	59	3 3 0 1 1	+	92	9 0 2 0 0	+
27	1 1 4 1 0	+	*60	3 4 2 0 0	+	93	9 1 0 1 0	–
*28	1 2 0 0 3	+	*61	3 5 0 1 0	+	94	10 0 0 0 1	–
29	1 2 2 2 0	+	62	4 0 0 0 3	–	95	10 2 0 0 0	–
30	1 2 3 0 1	+	*63	4 0 2 2 0	+	96	11 0 1 0 0	–
31	1 3 0 3 0	+	64	4 0 3 0 1	+	97	13 0 0 0 0	+
32	1 3 1 1 1	+	*65	4 1 0 3 0	+			
33	1 4 0 0 2	+	66	4 1 1 1 1	+			

Д.А. Петренюк

СУЩЕСТВОВАНИЕ КУБИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЛНОГО ГРАФА K_{13}

Решается задача разложения полных графов на множество регулярных подграфов, в частности, на кубические. С помощью компьютерных вычислений впервые найдено количество типов такого разложения полных графов с 13, 16 и 19 вершинами. Полностью исследована структура разных типов разложений полного графа с 13 вершинами.

D.A. Petrehyuk

EXISTENCE OF CUBIC DECOMPOSITION THE COMPLETE GRAPHS K_{13}

The problem of decomposition complete graphs on set of regular subgraphs, in particular, on cubic is solved. With the help of computer calculations number of types of such decomposition complete graphs with 13, 16 and 19 tops for the first time is found. The structure of different types of decomposition the complete graphs with 13 tops is completely investigated.

1. *Петренюк А.Я.* Про перелік кубічних розкладів повного графа *K*(10) // Зб. доп. п'ятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (16–18 травня 1996 р., Київ). – Київ, 1996. – С. 332 – 339.
2. *Петренюк Д.А.* Перелік можливих типів кубічних розкладів графа K_{13} // Зб. доп. третьої міжнар. наук.-практ. конф. “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2005)” (16–18 листопада 2005 р., Дніпропетровськ). – Дніпропетровськ, 1995. – С. 137 – 141.
3. *Бараев А.М., Фараджев И.А.* Построение и исследование на ЭВМ однородных и однородных двудольных графов // Алгоритмические исследования в комбинаторике.– М.: ВЦ АН СССР, 1978. – С. 47 – 53.

Отримано 29.06.2006