УДК 519.8

В.В. БОЙКО, Б.И. ГОЛЬДЕНГОРИН, В.Н. КУЗЬМЕНКО

# АЛГОРИТМ ДОПУСКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (ЗКО)

*Рассматривается применение теории допусков для решения задач комбинаторной оптимизации. В результате решение исходной задачи сводится к решению ряда релаксированных задач специального вида и со специальной структурой данных. Теория допусков и коррекция данных используется в новом алгоритме решения задачи о назначениях. Приводятся результаты вычислительных экспериментов и сравниваются с результатами наилучших методов.*



**Введение.** В настоящей работе излагается идея улучшения алгоритмов решения ЗКО за счет применения теории допусков [1] и демонстрируется применение этой теории при построении нового алгоритма решения задачи о назначениях (ЗН).

Вычислительные эксперименты на трудных тестовых ЗН Махола – Вьена [2] показывают, что разработанный алгоритм работает быстрее алгоритма Йонкера – Фолгенанта [3], считающегося лучшим среди известных алгоритмов решения ЗН [4].

Ранее, в [5] показано, что теория допусков успешно применялась для улучшения алгоритмов ветвей и границ при решении несимметричной задачи коммивояжера (НЗК). В этой теории определено понятие "горлышковый" допуск, величина которого является мерой структурных различий между оптимальным решением релаксированной НЗК и исходной. Применение идеи допусков привело к улучшению обеих составляющих метода ветвей и границ – правил ветвления и оценок снизу.

**Определение понятия допусков**. Классическое применение метода ветвей и границ для решения НЗК заключается в использовании ЗН для получения оценок снизу и в разбиении множества допустимых решений ЗН на $k$ подмножеств по дугам, входящим в цикл кратчайшей длины в оптимальном решении ЗН [6, 7]. Этот подход позволяет решать НЗК с числом вершин до 1000 в пределах одной минуты [5] на стандартном персональном компьютере.

Такой подход применим и к другим НП-трудным ЗКО. Общим в этом подходе является использование оценочной релаксированной задачи, множество допустимых решений которой включает множество допустимых решений исходной НП-трудной ЗКО.

Для НЗК множество допустимых решений, соответствующих множеству циклических перестановок, является подмножеством допустимых решений ЗН, соответствующих множеству всех перестановок.

Дадим неформальное определение понятия допусков на примере НЗК. Естественно предположить, что чем меньше циклов в оптимальном решение ЗН, тем ближе его структура к структуре оптимального решения НЗК. Для того, чтобы недопустимое решение НЗК приблизить к допустимому нужно разрушить хотя бы один цикл в оптимальном решении ЗН или сделать связной хотя бы одну пару циклов. "Запретив" какую-либо дугу, вошедшую в оптимальное решение ЗН, и решив ЗН с этим "запретом", получим скорее всего недопустимое решение НЗК, отличающееся от предыдущего хотя бы одной парой дуг. Аналогично, "обязав" какую-либо дугу, не вошедшую в оптимальное решение ЗН, войти в решение и решив ЗН с обязательной дугой, получим некоторое решение НЗК, также отличающееся от предыдущего хотя бы одной парой дуг. Разность между оптимальным значением ЗН с запрещенной дугой и первоначальным оптимальным решением называется верхним допуском запрещенной дуги, аналогичная разность для обязательной дуги является нижним допуском этой дуги.

В более общей формулировке верхним (нижним) допуском дуги относительно оптимального решения ЗН называется максимально возможное увеличение (уменьшение) веса этой дуги, сохраняющее оптимальным выбранное решение ЗН.

Понятие "горлышковый" допуск для НЗК определим следующим образом.

Найдем в каждом цикле оптимального решения оценочной ЗН дугу с минимальным верхним допуском. Среди найденных дуг выберем дугу с максимальный верхним допуском. Его значение назовем точным верхним "горлышковым" допуском. Аналогично, можно определить понятие точный нижний "горлышковый" допуск.

В теории допусков утверждается, что оценку оптимального значения НЗК, полученную с помощью решения ЗН, можно увеличить как на величину точного верхнего "горлышкового" допуска, так и на величину точного нижнего "горлышкового" допуска. То есть, из двух оценок можно взять большую.

Для ЗКО с аддитивной целевой функцией верхние (нижние) допуски – неотрицательные числа, которые не зависят от выбранного оптимального решения в случае, когда оптимальное решение не единственно. ЗКО с аддитивной целевой функцией имеет следующее свойство: если все верхние допуски строго положительны, то ЗКО имеет единственное решение. Если часть верхних допусков равна нулю, то множество оптимальных решений не единственно. Аналогичные выводы можно сделать и по нижним допускам.

**Использование допусков в алгоритме решения ЗН**. Далее понятия "горлышковых" допусков применяется для релаксированной ЗН с целью построения алгоритма решения ЗН, который отличается от всех известных алгоритмов ее решения.

ЗН может быть сформулирована следующим образом:

$$F^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

Для любого допустимого решения задачи (1)–(4) $x_{ij}^d$ и для любых чисел $\mu_i$, $\lambda_j$ справедливо:

$$F(x^d) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}^d = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}^d + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left( 1 - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^d \right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left( 1 - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^d \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_{ij} - \mu_i - \lambda_j) x_{ij}^d + \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \tag{5}$$

То есть множество оптимальных решений для задачи (1)–(4) с матрицей $c_{ij}$ и для задачи с матрицей $c_{ij} - \mu_i - \lambda_j$ одно и тоже. Это известное свойство данной задачи: столбцы и строки можно изменять на любое число, а структура задачи, в том числе множество ее оптимальных решений, не изменяется.

Далее рассмотрим задачу (1)–(4) с целевой функцией в виде (5):

$$F^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_{ij} - \mu_i - \lambda_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n, \tag{8}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{9}$$

Оценку снизу для оптимального значения задачи (6)–(9) дает решение такой задачи:

$$F_L^*(\lambda) = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (c_{ij} - \mu_i - \lambda_j)\, x_{ij} \; + \sum_{i=1}^{m}\mu_i + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \qquad (10)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \;\; i = 1,...,n, \qquad (11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \qquad (12)$$

То есть решение исходной задачи без учета ограничения (8).

Так как ограничения (8) могут быть не выполнены, то оптимальное решение задачи (10)–(12) зависит от $\lambda_j$. Но для любых $\lambda_j$ $F_L^*(\lambda) \le F^*$.

При использовании метода ветвей и границ для решения задачи (6)–(9) желательно, чтобы оценки вершин дерева были побольше.

Наилучшую оценку в форме (10)–(12) можем получить, решив такую двойственную задачу

$$\Phi^* = \max_{\lambda_j} F_L^*(\lambda) \;. \qquad (13)$$

Но решение задачи (13) для произвольной исходной задачи – процесс «дорогостоящий».

Построим хорошую оценку задачи, используя понятие допуски.

Будем считать, что начинаем решать задачу, имея редуцированную матрицу, т. е. матрицу $c_{ij} - \mu_i - \lambda_j$, у которой все элементы неотрицательны, в каждой строке есть 0, а все $\lambda_j = \lambda_j^0 = 0$. Отсюда следует, что оценка равна

$$F_L^*(\lambda^0) = \sum_{i=1}^{m}\mu_i + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^0 = \sum_{i=1}^{m}\mu_i \;,$$

где $\mu_i$ – минимальные элементы в строках нередуцированной матрицы.

Рассмотрим оптимальное решение оценочной задачи. Для каждого столбца $j$ обозначим $id(j)$ – количество переменных $x_{ij}$ равных 1.

Для столбцов $j$, таких, что $id(j) = 0$, возьмем в качестве $\lambda_j$ нижний допуск $\lambda_j = l(j)$, для остальных положим $\lambda_j = 0$. Соответствующая матрица $c_{ij} - \mu_i - \lambda_j$ состоит из неотрицательных элементов и имеет 0 в каждой строке и столбце. Получаем

$$F_L^*(l) = \sum_{i=1}^{m}\mu_i + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m}\mu_i + \sum_{\substack{j,\ т.ч.\\ id(j)=0}} l(j) \;\; \ge \;\; F_L^*(\lambda^0)\,,$$

где $F_L^*(l)$ – оценка по сумме нижних допусков, которая превосходит первоначальную.

Рассмотрим верхние допуски. Вернемся к редуцированной матрице, у которой все $\lambda_j = 0$. Возьмем некоторый столбец $j_0$, такой, что $id(j_0) > 1$. Прибавим к этому столбцу некоторое положительное число $a$. После этого в матрице можно редуцировать строки $i$, которые имеют верхние допуски $u_{ij_0} > 0$. Пусть $I_{j_0}$ – множество таких строк. Редукция будет составлять $\sum_{i \in I_{j_0}} \min\{u_{ij_0}, a\}$. После такой редукции опять получим матрицу, имеющую неотрицательные элементы и 0 в каждой строке. Учитывая, что $\lambda_{j_0} = -a$, получаем следующую оценку

$$F_L^*(\lambda^a) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{i \in I_{j_0}} \min\{u_{ij_0}, a\} - a .$$

Видно, что $a^*$, дающее наибольшую оценку, лежит на отрезке $[a_1, a_2]$, где $a_2 = \max_{i \in I_{j_0}}\{u_{ij_0}\}$, а $a_1$ предыдущее по величине $u_{ij_0}$. Значение оценки на этом отрезке равно

$$F_L^*(\lambda^{a^*}) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{i \in I_{j_0}} u_{ij_0} - \max_{i \in I_{j_0}}\{u_{ij_0}\} .$$

Если $I_{j_0}$ содержит более одного элемента, то $F_L^*(\lambda^{a^*}) > F_L^*(\lambda^0)$. Учтя, что соответствующее значение $a_j^*$ можно прибавить к каждому столбцу $j$, такому, что $id(j) > 1$, получим оценку по сумме верхних допусков

$$F_L^*(U) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{\substack{j \text{ т.ч.} \\ id(j)>1}} \left( \sum_{i \in I_j} u_{ij} - \max_{i \in I_j}\{u_{ij}\} \right).$$

Большая из двух оценок $F_L^*(l)$ и $F_L^*(U)$ дает величину "горлышкового" допуска для текущего решения релаксированной задачи. Заметим, что для вычисления этих оценок нет необходимости в существенных дополнительных вычислениях. Они вычисляются в процессе решения оценочной задачи.

**Коррекция данных и вычислительные эксперименты.** Другой путь получения «быстрых» оценок – это коррекция исходных данных задачи. Для рассматриваемого типа задач коррекция проводилась путем округления коэффициентов матрицы.

Далее в табл. 1 приведены результаты решения «трудных» тестовых задач [2] с размерностью матрицы $400 \times 400$ при первоначальном округлении вниз коэффициентов до 10000 и последовательном восстановлении исходных значений.

То есть в первом расчете коэффициенты, например, 23198 и 23 994 представлялись одинаковым значением 20 000, во втором – 23000, затем 23100 и 23900. Каждая задача решалась при одной и той же начальной точке.

ТАБЛИЦА 1

| Округление до | Время, сек | Итерации | Результат |
|---|---|---|---|
| 10000 | 0.29 | 9 | 11830000 |
| 1000 | 0.60 | 23 | 14336000 |
| 100 | 2.57 | 115 | 14582700 |
| 10 | 9.14 | 430 | 14605000 |
| 1 | 32.06 | 1521 | 14606500 |

В табл. 2 приведены результаты расчетов, когда решение предыдущей задачи использовалось как начальная точка для решения последующей.

ТАБЛИЦА 2

| Округление до | Время, сек | Итерации | Результат |
|---|---|---|---|
| 10000 | 0.29 | 9 | 11830000 |
| 1000 | 0.24 | 15 | 14336000 |
| 100 | 0.25 | 18 | 14582700 |
| 10 | 0.23 | 17 | 14605000 |
| 1 | 0.11 | 9 | 14606500 |
| Суммарные затраты | 1.12 | 68 | – |

В предыдущих табл. 1, 2 показано, что степень округления изменялась для последующих задач в 10 раз. В результате вычислительных экспериментов установлено, что лучшая скорость изменения округления равна 3–5, хотя в целом влияние этого параметра незначительно. При увеличении параметра от 4 до 32 время работы алгоритма увеличивается в 1,5 раза.

В табл. 3 приведено сравнение по времени работы алгоритма решение задачи о назначениях, основанного на описанной коррекции данных и допусках, с одним из лучших алгоритмов решения задач о назначении (JV алгоритм [5]) при решении «трудных» задач [4].

ТАБЛИЦА 3

| Размерность задачи | JV алгоритм | Предложенный алгоритм | Итерации | Выигрыш по времени |
|---|---|---|---|---|
| 200 | 0,08 | 0,20 | 52 | 0,41 |
| 400 | 0,93 | 1,12 | 68 | 0,83 |
| 600 | 3,20 | 2,14 | 61 | 1,49 |
| 800 | 7,70 | 6,98 | 85 | 1,10 |
| 1000 | 15,00 | 11,45 | 92 | 1,31 |

**Заключение.** В результате выполненной работы предложен новый подход для вычисления оценок при решении задач дискретной оптимизации. Подход реализован в виде алгоритма для решения задач о назначении. Тестовые расчеты на «трудных» задачах показали, что алгоритм не уступает по производительности лучшим алгоритмам решения задач данного типа. Развитие работы будет направлено на построение алгоритмов решения других задач дискретной оптимизации.

*В.В. Бойко, Б.Й. Гольденгорін, В.М. Кузьменко*

АЛГОРИТМ ДОПУСКІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ (ЗКО)

Розглядається застосування теорії допусків при розв'язуванні задач комбінаторної оптимізації. У результаті розв'язування задачі, що була дана, зводиться до розв'язування ряду релаксованих задач, що мають спеціальний вид та спеціальну структуру даних. Теорія допусків та корекція даних застосовуються в новому алгоритмі розв'язку задачі про призначення. Наводяться результати обчислювальних експериментів у порівнянні з результатами найкращих методів.

*V.V. Boyko, B.I. Goldengorin, V.M. Kuzmenko*

USING TOLERANCE ALGORITHM FOR SOLVING COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEM

The paper considers using tolerance theory for solving combinatorial optimization problems. As a result initial problem solving converts to solving a set of special problem with special data structure. The tolerance theory and data correction are used in new algorithm for solving an assignment problem. The results of computational experiments are given in comparison with results of the best methods.

1. *Goldengorin B., Jager G., Molitor P.* Some Basics on Tolerances // SOM Report 05A13. – University of Groningen, The Netherlands, 2004. – 44 p.
2. *Machol R.E., Wien M.* A hard assignment problem / / Oper. Res. – 1976. – **24**. – P. 190–192.
3. *Jonker R., Volgenant A.* A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems // Computing. – 1987. – **38**. – P. 325 – 340.
4. *Dell'Amico M., Toth P.* Algorithms and codes for dense assignment problems: the state of the art // Discrete Applied Mathematics. – 2000. – **100**. – P. 17 – 48.
5. *Goldengorin B., Sierksma G., Turkensteen M.* Tolerance Based Algorithms for the ATSP. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science // 30th InternationalWorkshop,WG2004, Bad Honnef, Germany, June 21-23, 2004, J. Hromkovic, M. Nagl, B. Westfechtel (eds.). – Lecture Notes in Comput. Sci. 3353, 2004. – P. 222 – 234.
6. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1985. – 384 с.
7. *Cook W.J., Cunningham W.H., Pulleyblank W.R., Schrijver A.* Combinatorial Optimization. – New York: John Willey & Sons Inc., 1998. – 427 p.

Получено 03.04.2006