

*Предлагаются два алгоритма раскраски максимальных плоских графов (плоских триангуляций) четырьмя цветами. Первый алгоритм основан на решении системы линейных уравнений по модулю 2 и находит один вариант раскраски. Вторым алгоритмом основан на решении системы линейных неравенств по модулю 3 и находит все варианты раскрасок.*

© Г.А. ДОНЕЦ, 2006

УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ

## АЛГОРИТМЫ РАСКРАСКИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

**Введение.** Известно, что задача о нахождении хроматического числа графов принадлежит к числу  $NP$ -полных проблем. Алгоритмы раскраски плоских графов в 4 цвета в литературе встречались редко. Есть описание псевдоалгоритма в [1], и там же упоминается о программе раскраски, созданной для системы Хивуда [2]. Алгоритм раскраски плоских триангуляций, основан на простом переборе всех вариантов, был реализован и описан в [3]. Там же была описана гипотеза о том, что число раскрасок  $f(n)$   $n$ -вершинной четырехсвязной плоской триангуляции удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{n-3} \leq f(n) \leq \left(\frac{11}{8}\right)^{n-3}. \quad (1)$$

В дальнейшем, за редким исключением, практические расчеты показали устойчивость этих границ.

**1. Вывод канонической системы уравнений.** Рассмотрим максимальный четырехсвязной плоский граф  $G$  (плоская триангуляция). По теореме Татта [4] рассматриваемый граф  $G$  является гамильтоновым. Гамильтонов цикл делит граф на две области, которые обозначим  $R_1$  и  $R_2$ . Рассмотрим случай, когда  $R_1$  и  $R_2$  – линейная последовательность треугольных граней (рис. 1). Правильной раскраске плоской триангуляции четырьмя красками соответствует такая раскраска ребер тремя красками, когда ребра каждой треугольной грани раскрашены тремя цветами. Если обозначить номера цветов цифрами 0, 1, и 2, то их двоичная запись будет (00), (01), (10).

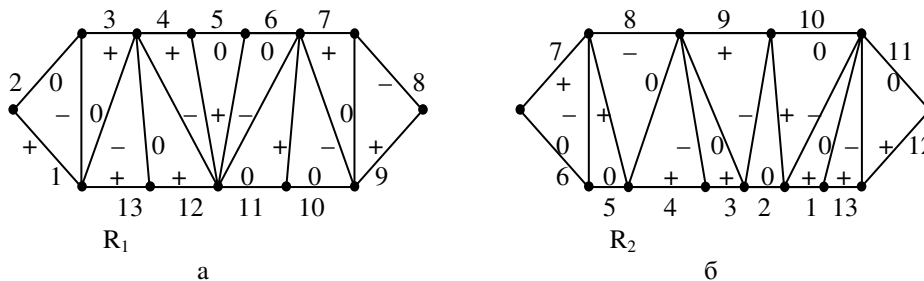


РИС. 1. Две области плоской триангуляции

Пусть  $x_i(y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – первый (второй) разряд записи номеров цвета для любого треугольника. Тогда раскраска ребер будет эквивалентна решению системы для каждой треугольной грани графа

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ x_1 y_1 &\equiv x_2 y_2 \equiv x_3 y_3 \equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \tag{2}$$

Занумеруем рёбра гамильтонова цикла последовательно по часовой стрелке. Как видно из рис.1, внутренние рёбра области  $R_1$  естественно упорядочиваются. Будем называть переменные  $y_i$ , соответствующими ребрам гамильтонова цикла, двойственными к  $x_i$ . Обозначим переменные для внутренних рёбер  $a_j(a'_j)$ . Их легко выразить через переменные  $x_i$  и  $y_i$  по (2). Возрастающей последовательности переменных  $a_j(a'_j)$  однозначно соответствует определённая последовательность рёбер гамильтонова цикла. Эту последовательность легко определить:  $S = (1, 2, 3, 13, 12, 4, 5, 6, 11, 10, 7, 8, 9)$ . Обозначим  $s_i$  (или  $s'_i$ ) сумму первых  $i$  членов этой последовательности для переменных  $x$  (соответственно  $y$ ). Тогда можно записать систему

$$\begin{aligned} a_1 &= s_2 + 1; & a'_1 &= s'_2 + 1; \\ a_2 &= s_3; & a'_2 &= s'_3; \\ & \dots & & \dots \\ a_{2k} &= s_{2k+1}; & a'_{2k} &= s'_{2k+1}; \\ a_{2k+1} &= s_{2k+2} + 1; & a'_{2k+1} &= s'_{2k+2} + 1; \\ & \dots & & \dots \\ a_{11} &= s_{12} + 1; & a'_{11} &= s'_{12} + 1; \\ a_{12} &= x_9 = s_{13}; & a'_{12} &= y_9 = s'_{13}. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя последнее уравнение в (2), получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1 + x_i y_i &\equiv 1 \\ s_2 + s'_2 + s_2 s'_2 &\equiv 1 \\ 1 + s_3 s'_3 &\equiv 1 \\ s_4 + s'_4 + s_4 s'_4 &\equiv 1 \\ \dots &\dots \\ s_{12} + s'_{12} + s_{12} s'_{12} &\equiv 1 \\ 1 + s_{13} s'_{13} &\equiv 1 \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \quad (4)$$

Назовём эту систему основной для  $R_1$ . Произведение всех равенств даёт соотношение для разрешающего полинома в виде

$$F_1(X, Y) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (5)$$

Если найдётся такая пара векторов  $(X, Y)$ , которая удовлетворяет (5), то тем самым получим решение системы (4), что задаёт некоторую раскраску рёбер области  $R_1$ . Если в области  $R_2$  заштриховать треугольник, основой которого есть ребро 9, то область  $R_2$  разобьётся на две части, которым соответствуют две последовательности рёбер  $P = (6, 7, 5, 8, 4, 3)$  и  $Q = (11, 12, 13, 1, 10, 2)$ . Так же, как и для области  $R_1$ , определим систему уравнений типа (4) и найдём для области  $R_2$  разрешающий полином  $F_2(X, Y) \equiv 1 \pmod{2}$ . Объединяя оба полинома и подставляя  $x_i$  вместо  $x_i^k$  ( $k > 1$ ), получим разрешающий полином для всего графа

$$F_1(X, Y) \cdot F_2(X, Y) \equiv F(X, Y) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (6)$$

Выделим в этом полиноме слагаемые, которые не содержат переменные  $y_i$ , и обозначим их  $A_1(G)$ . Очевидно, что для области  $R_1$

$$A_1(G) = s_2 s_4 \dots s_{10} s_{12}. \quad (7)$$

Используем свойство умножения  $ab \equiv a(a+b+1) \pmod{2}$ . Тогда  $s_{10} s_{12} = s_{10}(s_{10} + s_{12} + 1) = s_{10}(x_7 + x_8 + 1)$ . Продолжая эту операцию и заменяя единицу чертой отрицания, получим окончательно

$$A_1(G) = (x_1 + x_2) \overline{(x_1 + x_{13})} \overline{(x_{12} + x_4)} \overline{(x_5 + x_6)} \overline{(x_{11} + x_{10})} \overline{(x_7 + x_8)}. \quad (8)$$

По аналогии для области  $R_2$  получим полином

$$A_2(G) = (x_6 + x_7) \overline{(x_5 + x_8)} \overline{(x_4 + x_3)} (x_{11} + x_{12}) \overline{(x_{13} + x_1)} \overline{(x_{10} + x_2)}. \quad (9)$$

Если обозначить  $A(G) = A_1(G) A_2(G)$ , то это и будет та часть полинома (6), которая не содержит переменных  $y_i$ . Запишем  $A_1(G)$  и  $A_2(G)$  в виде последовательностей индексов переменных

$$B_1 = (1, 2) \overline{(3, 13)} \overline{(12, 4)} \overline{(5, 6)} \overline{(11, 10)} \overline{(7, 8)}; \quad B_2 = (6, 7) \overline{(5, 8)} \overline{(4, 3)} (11, 12) \overline{(13, 1)} \overline{(10, 2)}.$$

Составим последовательности пар таким образом, чтобы конец предыдущей пары совпадал с началом следующей, хотя при этом придётся некоторые пары

записывать в обратном порядке. При этом пары будут попеременно принадлежать  $B_1$  и  $B_2$ .

$$1) (1,2)(\overline{2,10})(\overline{10,11})(11,12)(\overline{12,4})(\overline{4,3})(\overline{3,13})(\overline{13,1}); \quad 2) (\overline{5,6})(6,7)(\overline{7,8})(\overline{8,5}). \quad (10)$$

Обе последовательности являются циклами, которым в выражении  $A(G)$  соответствуют циклические произведения. Пользуясь вышеупомянутым свойством умножения, нетрудно показать, что такое выражение тождественно равно  $0(\text{mod } 2)$ .

Предположим теперь, что для любого числа двойственных переменных, меньшего  $k$ , коэффициенты при наборе этих переменных в разложении полинома (5) тождественно равны  $0(\text{mod } 2)$ . Рассмотрим коэффициент при наборе  $k$  переменных  $N(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})$ . Не нарушая общности, будем полагать, что в последовательности  $S$  этому набору соответствуют места с номерами  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , расположенные в порядке возрастания. Аналогично, пусть в последовательностях  $P$  и  $Q$  им соответствуют номера  $p_1 < p_2 < \dots < p_l$ ;  $q_1 < q_2 < \dots < q_m$  ( $l > 0$ ,  $m > 0$ ;  $l + m = k$ ). В работе [5] доказана следующая

**Теорема 1.** Если для набора переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$  не выполняется хотя бы одно условие

$$s_j \equiv p_j \equiv q_j \equiv (j+1) (\text{mod } 2), \quad (11)$$

то  $N(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}) \equiv 0(\text{mod } 2)$ .

В зависимости от значений  $j$  будем называть вхождение переменной в набор  $N$  четным или нечетным.

**2. Каноническая система неравенств.** Вернёмся к графу, у которого двойственные графы в областях  $R_1$  и  $R_2$ , на которые естественным образом разбивается плоская триангуляция гамильтоновым циклом, являются цепями, или линейными графами (рис. 2).

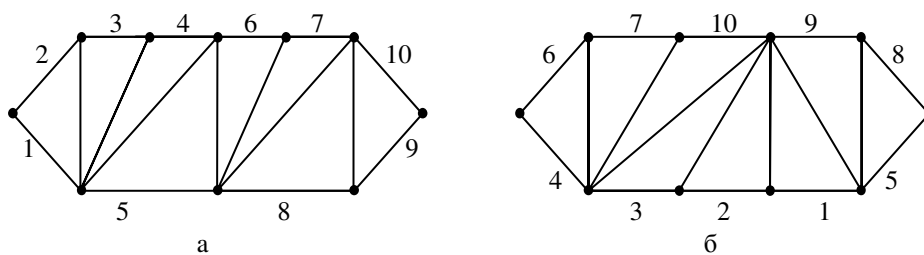


РИС. 2. Граф для системы неравенств

Выделим в  $R_1$  треугольник, две стороны которого принадлежат гамильтонову циклу (опорный треугольник), и занумеруем их 1 и 2. После этого внутренние ребра и треугольники можно упорядочить естественным путем. Продолжим ну-

мерацию ребер гамильтонова цикла в том же порядке. В результате получаем нумерацию на рис.2, а. Затем перенесем эту нумерацию на область  $R_2$  (рис.2, б).

Любой правильной раскраске вершин графа  $G$  соответствует такая раскраска в три цвета его ребер, что в каждом треугольнике все три ребра имеют разные цвета, которые обозначим 0, 1 и  $-1$ .

Пусть  $x_i$  – цвет ребра под номером  $i$  гамильтонова цикла. Тогда для первых двух ребер справедливо

$$x_1 \not\equiv x_2 \pmod{3}. \quad (12)$$

Пусть  $a_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n - 2$ ) – переменные, соответствующие цветам внутренних ребер. Тогда для правильной раскраски

$$a_1 \equiv (-x_1 - x_2) \pmod{3}.$$

В следующем треугольнике  $x_3 \not\equiv a_1 \pmod{3}$  и тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Продолжая те же рассуждения, получаем систему неравенств, дополненную одним равенством:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 - x_8 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 + x_9 \not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - x_9 - x_{10} \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{3}. \quad (13)$$

Для области  $R_2$  получается аналогичная система, которую назовем двойственной к системе (13).

$$\left. \begin{array}{l} x_4 - x_6 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 + x_7 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 - x_{10} \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} + x_3 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 - x_2 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 + x_1 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 - x_9 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 + x_8 \not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 - x_8 - x_5 \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{3}. \quad (14)$$

Обозначим  $a_i = \left\lfloor \frac{u}{2^i} \right\rfloor$  ( $\alpha_0 = u$ ). В работе [5] доказана

**Теорема 2.** Решением системы (13) является вектор  $X$ , у которого  $x_1 = 1 - \alpha_{n-2}$ ,  $x_i = (-1)^i \cdot (\alpha_{n-i} - \alpha_{n-i-1})$ , ( $i = \overline{1, n-1}$ ),  $x_n = (1-u)(-1)^n$ .

Итак, для любого  $0 < u < 3 \cdot 2^{n-2} - 1$  эти формулы дают решение системы (13). Аналогичные формулы с помощью вектора  $\beta$  можно получить и для системы (14), полагая  $\beta_j = \left\lfloor \frac{v}{2^j} \right\rfloor$ . Решением системы (13–14) будет такая пара  $(u, v)$ , для которой справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1 - \alpha_8 = -\beta_3 + \beta_2, & 6. \quad & \alpha_4 - \alpha_3 = \beta_8 - \beta_7, \\ 2. \quad & \alpha_8 - \alpha_7 = \beta_4 - \beta_3, & 7. \quad & -\alpha_3 + \alpha_2 = -\beta_7 + \beta_6, \\ 3. \quad & -\alpha_7 + \alpha_6 = -\beta_5 + \beta_4, & 8. \quad & \alpha_2 - \alpha_1 = -\beta_1 + v, \\ 4. \quad & \alpha_6 - \alpha_5 = 1 - \beta_8, & 9. \quad & -\alpha_1 + u = \beta_2 - \beta_1, \\ 5. \quad & -\alpha_5 + \alpha_4 = 1 - v, & 10. \quad & -u + 1 = \beta_6 - \beta_5. \end{aligned} \quad (15)$$

**3. Алгоритмы раскраски графов.** Здесь предлагаются два алгоритма раскраски плоских графов, идея которых изложена в [5]. Алгоритмы будут описаны не в формальном, а в содержательном смысле. Они реализованы в виде программ и по ним проведены необходимые расчеты.

В качестве примера для описания первого алгоритма воспользуемся рис. 2.

Идея первого алгоритма состоит в том, чтобы найти такой набор двойственных переменных  $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$  с наименьшим  $k$ , чтобы коэффициент при нем  $C(N) \not\equiv 0 \pmod{2}$ . В работе [5] доказана

**Теорема 3.** Если набор переменных  $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$  удовлетворяет условиям теоремы 1, то коэффициент  $C(N)$  равен значению полинома (6), построенного для графа, у которого ребра  $i_1, i_2, \dots, i_k$  стянуты у вершину, а вместо соответствующих переменных добавляется отрицательная черта в (8–9).

Пусть  $k = 0$ , т. е. ищется та часть полинома  $F(X, Y)$ , которая не содержит двойственных переменных. Для этого случая уже выписаны соответствующие формулы (10), где разбиение состоит из двух циклов. Как уже отмечалось, здесь  $A(G) \equiv 0 \pmod{2}$ .

Для  $k = 1$  необходимо найти такую переменную  $y$ , чтобы ее номер вхождения в систему был четным, и чтобы стягивание графа по соответствующему ребру не приводило к образованию полинома с нулевым значением.

В качестве  $y_i$  для  $R_1$  можно брать переменную из множества (1, 2, 13, 4, 6, 10, 8) а для  $R_2$  из множества (6, 7, 8, 3, 11, 12, 1, 2). Общими для обеих областей есть ребра 1, 2, 6, 8. Возьмем ребро 8. Получим разбиение

$$B_1 = (1,2)(\overline{3,13})(\overline{12,4})(\overline{5,6})(\overline{11,10})(\overline{7,9}); \quad B_2 = (6,7)(5,4) 3; (11,12)(\overline{13,1})(\overline{10,2}).$$

В результате все переменные образуют цепь

$$(\overline{3,13})(\overline{13,1})(1,2)(\overline{2,10})(\overline{10,11})(11,12)(\overline{12,4})(4,5)(\overline{5,6})(6,7)(\overline{7,9}).$$

В качестве решения можно взять значения:  $y_8 = 1$ ,  $y_i = 0$ ,  $x_8 = 0$ ; для множителей с чертой  $x_i = x_j$ , а для множителей без черты  $x_i \neq x_j$ . Это дает  $x_3 = x_{13} = x_1 \neq x_2 = x_{10} = x_{11} \neq x_{12} = x_4 \neq x_5 = x_6 = x_7 = x_9$ . Подставляя значения 0 или 1, получим два решения, например,  $(x_3 = x_{13} = x_1 = 1) \neq (x_2 = x_{10} = x_{11} = 0) \neq (x_{12} = x_4 = 1) \neq (x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = 0)$ .

Это решение приведено на рис.1, где цвета обозначены знаком "+", "-" и 0. Нетрудно проверить, что это решение справедливо для  $R_1$  и для  $R_2$ .

Рассмотрим второй алгоритм, основанный на решении системы неравенств. Для примера возьмем граф на рис. 2. В результате его работы находятся все решения задачи. Хотя в качестве примера выбран линейный случай, общий случай не намного сложнее, но для иллюстрации он почти ничего не добавляет.

Общее число решений для одной области равно  $3 \cdot 2^{n-2}$ , или для нашего примера  $3 \cdot 2^8 = 768$ . Будем искать такие пары значений  $0 \leq u, v \leq 767$ , которые удовлетворяют системе уравнений (15). В области  $R_1$  зафиксируем первые два значения  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ , что равносильно  $\alpha_8 = 0$ . Перейдем к пошаговому

изложению алгоритма, пользуясь формулой  $\alpha_i - \alpha_{i+1} = - \left\lfloor \frac{u + 2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$ .

$$x_1 = 1 = \left\lfloor \frac{v + 2^2}{2^3} \right\rfloor. \text{ В области } R_1 \quad u \in [0, 127].$$

В области  $R_2$   $x_1 = 1$  для  $v \in [4, 12) + 24k$ , где максимальное значение  $k = \left\lfloor \frac{767 - 12}{24} \right\rfloor = 31$ . Круглые скобки в дальнейшем означают, что переменная не принимает правое значение. В итоге получаем

$$u \in [0, 127], v \in [4, 12) + 24k, (k = 0, 1, \dots, 31).$$

$$x_2 = 0 = - \left\lfloor \frac{v + 2^3}{2^4} \right\rfloor. \text{ В области } R_1 \text{ границы } u \text{ не меняются. В области } R_2$$

$x_2 = 0$  для  $v \in [-8, 8) + 48k$ . Общий интервал с п. 1 равен  $[4, 8)$ . Максимальное  $k = \left\lfloor \frac{767 - 8}{48} \right\rfloor = 15$ . После двух шагов решение принадлежит множествам  $u \in [0, 127], v \in [4, 8) + 48k, (k = 0, 1, \dots, 15)$ .

$$x_3 = \left\lfloor \frac{u + 2^6}{2^7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v + 2^3}{2^4} \right\rfloor.$$

$$x_3 = \begin{cases} 0, & u \in [0,64) \\ 1, & u \in [64,127] \end{cases}; \quad x_3 = \begin{cases} 0, & v \in [-16,16), \\ 1, & v \in [16,48), \\ -1, & v \in [48,80). \end{cases} + 96k.$$

В  $R_1$   $x_3 = 0$  для  $u \in [0,64)$ , в  $R_2$  то же значение для интервала  $\{[4,8) + 48k\} \cap \{[-16,16) + 96k\} = [4,8) + 96k$ . Аналогично  $x_3 = 1$  для  $u \in [64,127]$ , в области  $R_2$  для интервала  $v \in \{[4,8) + 48k\} \cap \{[-16,16) + 96k\} = \emptyset$ . В результате множество решений сужается до  $u \in [0,64)$ ,  $v \in [4,8) + 96k$ , ( $k = 0, 1, \dots, 7$ ).

$$x_4 = - \left\lfloor \frac{u + 2^5}{2^6} \right\rfloor = 1 - \left\lfloor \frac{v}{2^8} \right\rfloor.$$

$$x_4 = \begin{cases} 0, & u \in [0,32) \\ -1, & u \in [32,63] \end{cases}; \quad x_4 = \begin{cases} 0, & v \in [0,256), \\ 1, & v \in [256,512), \\ -1, & v \in [512,767]. \end{cases}$$

$$u \in [0,32) \Rightarrow v \in \{[4,8) + 96k\} \cap [256,512),$$

$$u \in [32,63] \Rightarrow v \in \{[4,8) + 96k\} \cap [512,767].$$

Окончательное множество:

$$u \in [0,32), v \in [292,296) + 96k, (k = 0, 1, 2),$$

$$u \in [32,63], v \in [580,584) + 96k, (k = 0, 1).$$

$$u \in [8,12) \Rightarrow v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{292,295\} = \emptyset,$$

$$u \in [12,16) \Rightarrow v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{292,295\} = \{292,295\}.$$

Аналогично проверяя интервалы значений для  $x_5$ ,  $x_6$  и  $x_7$ , получаем

$$u \in [16,20) \Rightarrow v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{294\} = \{294\},$$

$$u \in [20,24) \Rightarrow v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{294\} = \emptyset,$$

$$u \in [24,28) \Rightarrow v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{390,486\} = \{390\},$$

$$u \in [28,32) \Rightarrow v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{390,486\} = \{486\},$$

$$u \in [32,36) \Rightarrow v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{582\} = \emptyset,$$

$$u \in [36,40) \Rightarrow v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{582\} = \{582\},$$

$$u \in [40,44) \Rightarrow v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{678\} = \{678\},$$

$$u \in [44,48) \Rightarrow v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{678\} = \emptyset,$$

$$u \in [48,52) \Rightarrow v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{677\} = \emptyset,$$

$$u \in [52,56) \Rightarrow v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{677\} = \emptyset.$$

$$x_8 = - \left\lfloor \frac{u + 2}{2^2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + v.$$

Для  $v$  осталось только семь точек, поэтому можно проверить это равенство непосредственно. Сопоставим значения:

$$\begin{array}{cccccccc} v = & 292 & 295 & 294 & 390 & 486 & 582 & 678 \\ x_8 = & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$



Аналогично для  $u$ :

$$u = 12-13, 14-17, 18-19, 24-25, 26-29, 30-31, 36-37, 38-41, 42-43.$$

$$x_8 = 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1.$$

Сравнивая  $u$  и  $v$ , получим для проверки только три точки.

$$(14, 15) \rightarrow 292, (24, 25) \rightarrow 390, (36, 37) \rightarrow 582.$$

$$x_9 = u - \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{v+2}{2^2} \right\rfloor.$$

Решая это уравнение, находим три решения (15, 292), (25, 390) и (37, 582). Благодаря перестановке трех цветов можно получить еще пять решений для переменной  $u$ : 15  $\rightarrow$  (240, 271, 496, 527, 752); 25  $\rightarrow$  (230, 281, 486, 537, 742); 37  $\rightarrow$  (218, 293, 474, 549, 730). Аналогичные решения получим для  $v$ : 292  $\rightarrow$  (731, 548, 219, 36, 475); 390  $\rightarrow$  (633, 646, 121, 134, 377); 582  $\rightarrow$  (441, 70, 697, 326, 185).

Этим и исчерпываются все 18 решений данного примера. Если зафиксировать только одно значение  $x_1 = 1$ , то получим 6 решений. Это число соответствует высказанной гипотезе, для которой при  $n = 10$  получаем  $4,2 < 6 < 10,5$ .

*Г.П. Донець*

#### АЛГОРИТМИ РОЗФАРБУВАННЯ ПЛОСКИХ ГРАФІВ

Пропонуються два алгоритми розфарбування максимальних плоских графів (плоских триангуляцій) чотирма кольорами. Перший алгоритм ґрунтується на розв'язанні системи лінійних порівнянь за модулем 2 і знаходить один варіант розфарбування. Другий алгоритм ґрунтується на розв'язанні системи лінійних нерівностей за модулем 3 і знаходить всі варіанти розфарбувань.

*G.A. Donets*

#### ALGORITHMS FOR COLOURING PLANAR GRAPHS.

Two algorithms for colouring a maximal planar graphs (plane triangulation) with four colours are proposed. The first algorithm is based on solving system of linear equations by the module 2, which finds one variant of colorings. The second algorithm is based on solving system of linear inequalities by the module 3, which finds all variants of colorings.

1. Зыков А.А. Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука, 1969. – 543 с.
2. Sykow A.A., Kesselmen D.Ja., Neimark Ju.J., Podcorytov W.N. Ube rein verfahren zur farbung ebenen triangulationen // Math. Nachrichte, – 1969. – 40. – S. 51–59.
3. Донець Г.А., Шор Н.З. О задаче четырёх красок // Математика сегодня. – Киев: Вища школа, 1983. – С. 34–55.
4. Tutte W.T. On hamilton circuits // J. London Math. Soc. – 1946, – 21. – P. 98–101.
5. Донець Г.А., Шор Н.З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 143 с.

Получено 11.07.2006