Теорія оптимальних рішень

Для взвешенного числа устойчивости неориентированного графа G выведена верхняя оценка, которая является решением задачи линейного программирования с числом ограничений $O(|V|^3)$, где V – количество вершин в графе. Доказано, что полученная верхняя оценка не хуже, чем известная оценка, связанная с многогранником $CSTAB(G)$, а также является точной оценкой сверху для взвешенного числа устойчивости t-совершенного графа.

УДК 519.8

П.И. СТЕЦЮК, С.И. БУТЕНКО, О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ВЗВЕШЕННОГО ЧИСЛА УСТОЙЧИВОСТИ ГРАФА*

Введение. Пусть $G=(V,E)$ – взвешенный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E; вес каждой вершины $i \in V$ задан положительным целым числом w_i. Подмножество вершин $S \subseteq V$ называется устойчивым (или независимым) множеством графа G, если для любых $i, j \in S$ ребро (i, j) не принадлежит E. Взвешенное число устойчивости графа G определяется как $\alpha(G,w) = \max \sum_{i \in S} w_i$, где $S \subseteq V$ – устойчивое множество. Множество S^*, на котором достигается $\alpha(G,w)$, называется максимальным взвешенным устойчивым (или независимым) множеством.

В общем случае задача нахождения взвешенного числа устойчивости графа G NP-трудная. Доказано [1], что она является NP-трудной даже в частном случае, когда все веса вершин равны единице. Поэтому актуален поиск оценок, приближающих как взвешенное число устойчивости графа $\alpha(G,w)$, так и обычное число устойчивости графа $\alpha(G)$, когда все веса вершин графа равны единице. Величина $\alpha(G)$ характеризует мощность максимального по числу вершин устойчивого множества графа G.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта UKM2-2812-KV-06 (CRDF Cooperative Grants Programm).

Пусть χ^S – "инцидентный" вектор для подмножества $S \subseteq V$: $\chi^S \in R^{|V|}$, $\chi_i^S = 1$, если $i \in S$, $\chi_i^S = 0$, если $i \in V \setminus S$. Выпуклая оболочка "инцидентных" векторов χ^S для всех устойчивых множеств S графа G

$$STAB(G) := conv\{\chi^S : S \subseteq V\text{- устойчивое множество}\}$$

называется многогранником устойчивых множеств (stable set polytope) [2]. Тогда задача нахождения взвешенного числа устойчивости графа G формулируется следующим образом:

$$\alpha(G,w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i, \quad x \in STAB(G). \tag{1}$$

В общем случае многогранник устойчивых множеств $STAB(G)$ может иметь очень сложную структуру [2], чем обусловлено то, что задача нахождения $\alpha(G,w)$ является NP-трудной. Вычисление "тесных" верхних оценок для $\alpha(G,w)$, которые достаточно хорошо аппроксимируют сверху значение целевой функции в задаче (1), имеет как практический, так и теоретический интерес.

Рассмотрим верхнюю оценку, связанную с многогранником:

$$CSTAB(G) = \begin{cases} 0 \le x_i \le 1 & \text{для каждой вершины } i \in V, \\ x_i + x_j \le 1 & \text{для каждого ребра } (i,j) \in E, \\ \sum\limits_{i \in C_{2k+1}} x_i \le k & \text{для каждого нечетного цикла } C_{2k+1} \in V, \end{cases}$$

который аппроксимирует (сверху) многогранник устойчивых множеств $STAB(G)$. Условимся эту оценку обозначать $\alpha_C^*(G,w)$. Для ее нахождения требуется решить задачу линейного программирования (ЛП-задачу):

$$\alpha_C^*(G,w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i, \quad x \in CSTAB(G), \tag{2}$$

которая в общем случае содержит неполиномиальное количество ограничений. Несмотря на это, задача (2) разрешима за полиномиальное время [2]. Полиномиальный алгоритм для нахождения $\alpha_C^*(G,w)$ базируется на использовании метода эллипсоидов и на том, что если точка $\overline{x}$ удовлетворяет первым двум семействам линейных неравенств для многогранника $CSTAB(G)$, то за полиномиальное время можно либо убедиться, что точка $\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям для всех нечетных циклов, либо найти нечетный цикл, для которого ограничение будет максимально нарушаться. Для этого требуется найти $|V|$ кратчайших путей в специально построенном неориентированном графе G', содержащем $2|V|$ вершин (вершины V и их копии V') и $2|E|$ ребер.

t-совершенными (t-perfect) графами называют семейство графов, для которых многогранник устойчивых множеств $STAB(G)$ совпадает с многогранником $CSTAB(G)$ ($STAB(G) = CSTAB(G)$). Для t-совершенных графов оценка $\alpha_C^*(G,w)$ является точной оценкой сверху для $\alpha(G,w)$, т.е. справедливо следующее равенство:

$$\alpha_C^*(G,w) = \alpha(G,w). \tag{3}$$

Естественно, что когда граф G принадлежит семейству t-совершенных графов, то задача (1) полиномиально разрешима в том смысле, что $\alpha(G,w)$ может быть найдено с любой заданной точностью за полиномиальное время.

Многогранник $CSTAB(G)$ можно описать с помощью полиномиального количества линейных ограничений [3, с. 1187], используя переменные y_{ij} для каждого ребра $(i,j) \in E$ и переменные $z_{u,v}$ для каждой пары вершин $u, v \in V$. Область действия ограничений, связанных с нечетным циклом, эквивалентна следующей системе линейных ограничений:

$$\begin{cases} y_{ij} = 1 - x_i - x_j & \text{для каждого ребра } (i,j) \in E, \\ z_{v.v} \ge 1 & \text{для каждой вершины } v \in V, \\ z_{u,v} \le y_{uv} & \text{для каждого ребра } (u,v) \in E, \\ z_{t,w} \le z_{t,v} + y_{uv} + y_{vw} & \text{для всех } t,u,v,w \in V : (u,v),(v,w) \in E. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, для t-совершенных графов $\alpha(G,w)$ может быть найдено за полиномиальное время с помощью любого из полиномиальных алгоритмов для задачи линейного программирования. Заметим, что результирующее количество ограничений для описания многогранника $CSTAB(G)$ с помощью (4), равно $O(|V|^2|E|)$.

Рассмотрим оценку $\alpha_\Delta^*(G,w)$, нахождению которой соответствует ЛП-задача с полиномиальным количеством ограничений (порядка $|V|^3$). Покажем, что оценка $\alpha_\Delta^*(G,w)$ не менее точная оценка сверху для $\alpha(G,w)$, чем оценка $\alpha_C^*(G,w)$. Естественно, что оценка $\alpha_\Delta^*(G,w)$ также будет точной верхней оценкой для $\alpha(G,w)$, когда граф G является t-совершенным.

Вывод оценки $\alpha_\Delta^*(G,w)$. ЛП-задача для оценки $\alpha_\Delta^*(G,w)$ следует релаксацией (ослаблением) определенной формулировки квадратичной булевой задачи, с помощью которой формулируется проблема нахождения $\alpha(G,w)$. Построение ЛП-задачи опишем последовательностью этапов, которые будем комментировать необходимыми сведениями.

Этап 1. Рассмотрим задачу о максимальном взвешенном устойчивом множестве графа G в виде следующей квадратичной булевой задачи [4]:

$$\alpha(G,w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i \tag{5}$$

при ограничениях

$$x_i x_j = 0 \quad \forall (i,j) \in E, \tag{6}$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \forall i \in V, \tag{7}$$

где булевая переменная $x_i \in \{0,1\}$ равна единице, если вершина i включается в устойчивое множество, и равна нулю – иначе. Булевые переменные описаны квадратичными ограничениями равенствами (7). Квадратичные ограничения (6) означают, что если две вершины связаны ребром в графе G, то они обе не могут одновременно принадлежать независимому множеству.

Этап 2. Переформулируем задачу (5)–(7) с помощью бинарных (± 1)-переменных:

$$y_i = 1 - 2x_i \quad \forall i \in V, \tag{8}$$

где вершине i соответствует бинарная переменная y_i, которая равна -1, если вершина i включается в устойчивое множество, и равна 1 в противном случае. В результате получаем квадратичную задачу для бинарных переменных в следующей формулировке:

$$\alpha(G,w) = \max \sum_{i \in V} \left(\frac{w_i}{2} - \frac{w_i y_i}{2} \right) \tag{9}$$

при ограничениях

$$y_i y_j - y_i - y_j + 1 = 0 \quad \forall (i,j) \in E, \tag{10}$$

$$y_i^2 = 1 \quad \forall i \in V. \tag{11}$$

Этап 3. Добавим к задаче (9)–(11) семейство квадратичных ограничений:

$$\begin{cases} +y_i y_j + y_i y_k + y_j y_k \geq -1, \\ -y_i y_j - y_i y_k + y_j y_k \geq -1, \\ -y_i y_j + y_i y_k - y_j y_k \geq -1, \\ +y_i y_j - y_i y_k - y_j y_k \geq -1, \end{cases} \quad \forall i,j,k \in V : i < j < k. \tag{12}$$

Ограничения (12) не изменяют множества оптимальных решений задачи (9)–(11) [5]. Они следуют из того, что для произвольной тройки бинарных (± 1)-переменных y_i, y_j и y_k, такой что $i \neq j \neq k$ всегда правильными являются квадратичные ограничения в виде неравенств

$$\begin{cases} (+y_i + y_j + y_k)^2 \ge 1, \\ (-y_i + y_j + y_k)^2 \ge 1, \\ (+y_i - y_j + y_k)^2 \ge 1, \\ (+y_i + y_j - y_k)^2 \ge 1. \end{cases}$$

Последние легко преобразовываются к форме (12), учитывая, что $y_i^2 = 1$, $y_j^2 = 1$ и $y_k^2 = 1$.

Этап 4. Линеаризуем задачу (9)–(12), положив $y_{ij} = y_i y_j$ для каждой пары $i, j \in V$, таких что $i < j$ и релаксируя ограничения (11) линейными неравенствами $-1 \le y_i \le 1 \quad \forall i \in V$. В результате получаем ЛП-задачу

$$\alpha_\Delta^*(G, w) = \max \sum_{i \in V} \left(\frac{w_i}{2} - \frac{w_i y_i}{2} \right) \tag{13}$$

при ограничениях

$$y_{ij} - y_i - y_j + 1 = 0 \quad \forall (i, j) \in E, \tag{14}$$

$$-1 \le y_i \le 1 \quad \forall i \in V, \tag{15}$$

$$\begin{cases} +y_{ij} + y_{ik} + y_{jk} \ge -1, \\ -y_{ij} - y_{ik} + y_{jk} \ge -1, \\ -y_{ij} + y_{ik} - y_{jk} \ge -1, \\ +y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \ge -1, \end{cases} \quad \forall i, j, k \in V : i < j < k. \tag{16}$$

Учитывая, что ЛП-задача (13)–(16) получена "ослаблением" квадратичной задачи (9)–(12), имеем

$$\alpha_\Delta^*(G, w) \ge \alpha(G, w). \tag{17}$$

Следовательно, оценка $\alpha_\Delta^*(G, w)$ есть оценкой сверху для взвешенного числа устойчивости $\alpha(G, w)$.

Этап 5. Переформулируем задачу (9)–(12) с помощью "релаксированных" булевых переменных. Для этого "релаксированные" бинарные переменные $y_i, i \in V$ переведем в "релаксированные" булевые переменные с помощью замены (8), а "релаксированные" бинарные переменные y_{ij} – в "релаксированные" булевые переменные x_{ij} с помощью замены

$$y_{ij} = 1 - 2x_{ij} \quad \forall i, j \in V : i < j. \tag{18}$$

В результате получаем, что оценке $\alpha_\Delta^*(G, w)$ соответствует ЛП-задача

$$\alpha^*_\Delta(G,w)=\max\sum_{i\in V} w_i x_i \qquad (19)$$

при ограничениях

$$x_i+x_j-x_{ij}=0 \quad \forall (i,j)\in E, \qquad (20)$$

$$\begin{cases} +x_{ij}+x_{ik}+x_{jk}\le 2, \\ -x_{ij}-x_{ik}+x_{jk}\le 0, \\ -x_{ij}+x_{ik}-x_{jk}\le 0, \\ +x_{ij}-x_{ik}-x_{jk}\le 0; \end{cases} \quad \forall i,j,k\in V: i<j<k. \qquad (21)$$

$$0\le x_i\le 1 \quad \forall i\in V. \qquad (22)$$

ЛП-задача (19)–(22) содержит $O(|V|^3)$ ограничений. Точное количество ограничений равно $|E|+2|V|+2|V|(|V|-1)(|V|-2)/3$. Из них самую значительную часть, равную $2|V|(|V|-1)(|V|-2)/3$, определяют ограничения (21), которые (а также их форма в бинарных переменных) известны как ограничения треугольника (triangle inequalities). Их наличие придает ЛП-задаче (19)–(22) интересные "геометрические" свойства, связанные с нечетным циклом C_{2k+1} в графе G.

Свойства оценки $\alpha^*_\Delta(G,w)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Из ограничений (20) и (21) следует справедливость линейных неравенств

$$\sum_{i\in C_{2k+1}} x_i\le k \qquad (23)$$

для каждого нечетного цикла $C_{2k+1}\in V$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный нечетный цикл C_{2k+1} с вершинами $\{i_1,\ldots,i_{2k+1}\}$ и ребрами $(i_r,i_{r+1}),\ r=1,\ldots,2k,\ (i_1,i_{2k+1})$. Не ограничивая общности, будем считать что $i_1<i_2<\ldots<i_{2k+1}$. Для цикла C_{2k+1} ограничения (20) имеют следующий вид:

$$x_{i_r}+x_{i_{r+1}}=x_{i_r i_{r+1}}, \quad r=1,2,\ldots,2k, \quad x_{i_1}+x_{i_{2k+1}}=x_{i_1 i_{2k+1}},$$

и сложив их получим

$$2\sum_{r=1}^{2k+2} x_{i_r}=x_{i_1 i_{2k+1}}+\sum_{r=1}^{2k} x_{i_r i_{r+1}}. \qquad (24)$$

Оценим правую часть в равенстве (24).

Если $k=1$ (соответствует нечетному циклу C_3), то для тройки вершин (i_1,i_2,i_3) из первого неравенства в (21) следует справедливость неравенства

$$x_{i_1 i_2}+x_{i_1 i_3}+x_{i_2 i_3}\le 2.$$

Тогда из равенства (24) имеем

$$2\sum_{r=1}^{3} x_{i_r} = x_{i_1 i_3} + \sum_{r=1}^{2} x_{i_r i_{r+1}} = x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_3} + x_{i_2 i_3} \le 2,$$

откуда следует

$$\sum_{r=1}^{3} x_{i_r} \le 1 \quad \text{или} \quad \sum_{i \in C_3} x_i \le 1,$$

что дает доказательство теоремы для нечетного цикла C_3.

Пусть k – произвольное натуральное число, такое что $k \ge 2$. Рассмотрим "покрытие" вершин нечетного цикла C_{2k+1} двумя типами треугольников (тройками вершин), которое для цикла C_9 показано на рисунке.

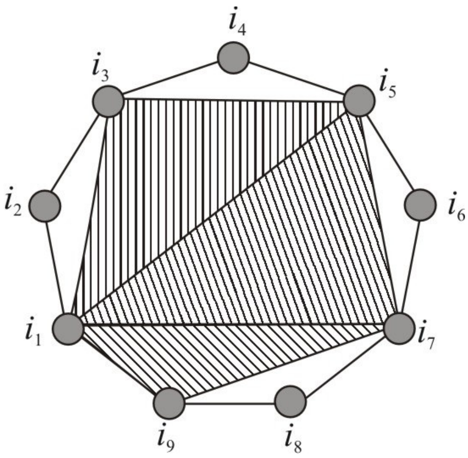

РИСУНОК. Покрытие треугольниками вершин нечетного цикла C_9

Для первого типа треугольников ("незаштрихованные") будем использовать первое неравенство из (21), а для второго типа треугольников ("заштрихованные") – третье неравенство из (21).

Первый тип треугольников содержит следующие тройки вершин: $(i_1, i_2, i_3), \ldots, (i_{2k-1}, i_{2k}, i_{2k+1})$. Количество таких троек равно k, и из первого неравенства в (21) для них следует справедливость неравенств

$$x_{i_{2t-1} i_{2t}} + x_{i_{2t-1} i_{2t+1}} + x_{i_{2t} i_{2t+1}} \le 2, \quad t = 1, \ldots, k.$$

Сложив их, получаем

$$\sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1} i_{2t}} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t-1} i_{2t+1}} + \sum_{t=1}^{k} x_{i_{2t} i_{2t+1}} \le 2k .$$

Затем запишем в виде

$$x_{i_1i_3}+\sum_{t=2}^{k}x_{i_{2t-1}i_{2t+1}}+\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t-1}i_{2t}}+\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t}i_{2t+1}}\le 2k. \tag{25}$$

Второй тип треугольников содержит следующие тройки вершин: $(i_1,i_3,i_5),\ldots,(i_1,i_{2k-1},i_{2k+1})$. Количество таких троек равно $(k-1)$, и из третьего неравенства в (21) для них следует справедливость неравенств

$$-x_{i_1i_{2t-1}}+x_{i_1i_{2t+1}}-x_{i_{2t-1}i_{2t+1}}\le 0,\quad t=2,\ldots,k,$$

сложив которые получаем неравенство

$$-x_{i_1i_3}+x_{i_1i_{2k+1}}-\sum_{t=2}^{k}x_{i_{2t-1}i_{2t+1}}\le 0.$$

Сложив последнее неравенство с неравенством (25), получаем неравенство

$$x_{i_1i_{2k+1}}+\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t-1}i_{2t}}+\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t}i_{2t+1}}\le 2k. \tag{26}$$

Учитывая, что

$$\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t}i_{2t+1}}+\sum_{t=1}^{k}x_{i_{2t-1}i_{2t}}=\sum_{t=1}^{k}(x_{i_{2t-1}i_{2t}}+x_{i_{2t}i_{2t+1}})=\sum_{r=1}^{2k}x_{i_ri_{r+1}},$$

из неравенства (26) имеем справедливость неравенства

$$x_{i_1i_{2k+1}}+\sum_{r=1}^{2k}x_{i_ri_{r+1}}\le 2k. \tag{27}$$

Далее, подставляя (27) в (24), получаем

$$2\sum_{r=1}^{2k+1}x_{i_r}=x_{i_1i_{2k+1}}+\sum_{r=1}^{2k}x_{i_ri_{r+1}}\le 2k,$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{r=1}^{2k+1}x_{i_r}\le k\quad \text{или}\quad \sum_{i\in C_{2k+1}}x_i\le k,$$

что завершает доказательство теоремы.

Перейдем к исследованию свойств оценки $\alpha^*_\Delta(G,w)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для произвольного графа G оценка $\alpha^*_\Delta(G,w)$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha^*_C(G,w)\ge\alpha^*_\Delta(G,w)\ge\alpha(G,w).$$

Доказательство. Из определения оценки $\alpha^*_\Delta(G,w)$ следует, что $\alpha^*_\Delta(G,w)\ge\alpha(G,w)$ (см. формулу (17)). Докажем, что $\alpha^*_C(G,w)\ge\alpha^*_\Delta(G,w)$. От задачи (19)–(22) легко перейти к ЛП-задаче:

$$\alpha_{\Delta}^{*}(G,w)=\max\sum_{i\in V}w_i x_i \qquad (28)$$

при ограничениях

$$x_i+x_j-x_{ij}=0 \quad \forall(i,j)\in E, \qquad (29)$$

$$\begin{cases}+x_{ij}+x_{ik}+x_{jk}\le 2,\\ -x_{ij}-x_{ik}+x_{jk}\le 0,\\ -x_{ij}+x_{ik}-x_{jk}\le 0,\\ +x_{ij}-x_{ik}-x_{jk}\le 0;\end{cases} \quad \forall i,j,k\in V: i<j<k. \qquad (30)$$

$$0\le x_i\le 1 \quad \forall i\in V, \qquad (31)$$

$$x_{ij}\le 1 \quad \forall(i,j)\in E, \qquad (32)$$

$$x_i+x_j\le 1 \quad \forall(i,j)\in E, \qquad (33)$$

$$\sum_{i\in C_{2k+1}}x_i\le k \quad \forall C_{2k+1}\in V. \qquad (34)$$

Здесь дополнительные ограничения (32) получены из ограничений (30). Так, например, сложив первое и последнее из неравенств (30), имеем $2x_{ij}\le 2$, откуда следует справедливость неравенств (32). Ограничения (33) получены в результате сложения ограничений (29) с ограничениями (32). Ограничения (34) связаны с нечетными циклами в графе G и следуют из теоремы 1.

Задача (28)–(34) включает избыточные линейные ограничения (32)–(34), которые следуют из ограничений (29)–(31). От задачи (28)–(34) перейдем к "ослабленной" ЛП-задаче, убрав из нее все ограничения за исключением ограничений (31), (33) и (34). В результате получаем ЛП-задачу

$$\alpha^{*}(G,w)=\max\sum_{i\in V}w_i x_i \qquad (35)$$

при ограничениях

$$0\le x_i\le 1 \quad \forall i\in V, \qquad (36)$$

$$x_i+x_j\le 1 \quad \forall(i,j)\in E, \qquad (37)$$

$$\sum_{i\in C_{2k+1}}x_i\le k \quad \forall C_{2k+1}\in V, \qquad (38)$$

для которой $\alpha^{*}(G,w)\ge\alpha_{\Delta}^{*}(G,w)$. Задача (35)–(38) является формулировкой задачи (2) для нахождения $\alpha_{C}^{*}(G,w)$, так как ограничения (36)–(38) – определение многогранника $CSTAB(G)$, т.е. $\alpha^{*}(G,w)=\alpha_{C}^{*}(G,w)$. Отсюда имеем $\alpha_{C}^{*}(G,w)\ge\alpha_{\Delta}^{*}(G,w)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 и равенства (3), которое означает что для t-совершенных графов оценка $\alpha_C^*(G,w)$ является точной оценкой сверху для $\alpha(G,w)$, следует справедливость теоремы

Теорема 3. Если граф G – t-совершенный, то $\alpha_\Delta^*(G,w) = \alpha(G,w)$.

Следовательно, для t-совершенных графов оценка $\alpha_\Delta^*(G,w)$ точная верхняя оценка для взвешенного числа устойчивости $\alpha(G,w)$.

П.І.Стецюк,С.І. Бутенко,О.А. Березовський

ПРО ОДНУ ВЕРХНЮ ОЦІНКУ ДЛЯ ЗВАЖЕНОГО ЧИСЛА СТІЙКОСТІ ГРАФА

Для зваженого числа стійкості неорієнтованого графа G виведено верхню оцінку, яка є розв'язком задачі лінійного програмування з числом обмежень $O(|V|^3)$, де V – кількість вершин в графі. Доведено, що отримана верхня оцінка не гірша за відому оцінку, що пов'язана з багатокутником $CSTAB(G)$, а також є точною оцінкою зверху для зваженого числа стійкості t-перфектного графа.

P.I. Stetsyuk,S.I. Butenko,O.A. Berezovski

ON ONE UPPER BOUND FOR THE WEIGHTED STABILITY NUMBER OF A GRAPH

We derived an upper bound for the weighted stability number of a simple undirected graph G, which is the solution of a linear pogramming problem with $O(|V|^3)$ constraints, where V is a number of vertices in the graph. We proved that this upper bound is at least as good as the known bound based on the polytope $CSTAB(G)$, and it is also an exact upper bound for the weighted stability number of the t-perfect graph.

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. *Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A.* Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – 362 p.
3. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. – Berlin: Springer, 2003. – 1881 p.
4. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – 394 p.
5. *Стецюк П.И.* Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №1. – С. 63–75.

Получено 17.04.2007