УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН, А.П. ЛИХОВИД

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ВЛОЖЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматриваются квазиблочные задачи со связывающими переменными, в которых каждый блок (подзадача) в свою очередь является квазиблочной задачей. Для решения предлагается схема декомпозиции, основанная на построении линейных аппроксимаций и поиске ε-оптимальных решений подзадач. Особенностью алгоритма является возможность согласования точности аппроксимаций для различных подзадач.

В работе рассматриваются задачи линейного программирования большой размерности, являющиеся естественным обобщением квазиблочных задач со связывающими переменными [1]. Такие задачи имеют место, если каждый блок квазиблочной задачи в свою очередь является квазиблочной задачей.

Прикладными областями, в которых возникают такие задачи, являются моделирование в экономике [2], многоэтапное стохастическое программирование [3–5] и др. Рассматриваемые задачи достигают размерностей десятков миллионов переменных и ограничений. Для их решения разрабатываются специализированные алгоритмы, используются суперкомпьютеры с большим числом процессоров. Предлагаемые алгоритмы являются, как правило, обобщениями схемы декомпозиции Бендерса [6].

Вложенная структура рассматриваемых задач описывается совокупностью связанных выпуклых подзадач – деревом подзадач. Вопросы применения схем декомпозиции к нелинейным выпуклым квазиблочным задачам со связывающими переменными рассматривались в [7–9]. В этих работах был предложен подход, позволяющий перейти к вычислению ε-субградиентов координирующей задачи на основе приближенных решений подзадач. Для решения координирующей задачи должны использоваться, соответственно, ε-субградиентные методы. В настоящей работе для задач с вложенной структурой предлагается схема декомпозиции, также основанная на поиске ε-оптимальных решений подзадач. Для каждой подзадачи строится линейная аппроксимация, точность которой увеличивается в процессе вычислений. Особенностью предлагаемого алгоритма является возможность согласования точности аппроксимаций для различных подзадач.

1. Будем считать заданным некоторое дерево (V, E). Каждой вершине $q \in V$ поставим в соответствие оптимизационную задачу, зависящую от параметров. Вектор параметров обозначим x^q, вектор переменных, по которым осуществляется оптимизация, – y^q. Задачи, соответствующие разным вершинам дерева (V, E), являются связанными. Связь заключается в том, что если вершина q – непосредственный потомок вершины p, то

$$x^q = (x^p, y^p). \tag{1}$$

Для корневой вершины r будем предполагать, что $x^r = 0$.

Пусть $f^q(x^q)$ - некоторая функция параметров x^q вершины q. В дальнейшем будем считать эквивалентными записи $f^q(x^q)$ и $f^q(x^p, y^p)$, где q есть непосредственный потомок вершины p.

Обозначим $S(q)$ множество непосредственных потомков вершины q.

Оптимизационная задача для вершины $q \in V$ имеет вид: найти

$$\varphi^q(x^q) = \min_{y^q} \left\{ c^q y^q + \sum_{s \in S(q)} \varphi^s(x^q, y^q) \right\} \tag{2}$$

при ограничениях

$$A^q y^q \le d^q - B^q x^q. \tag{3}$$

Матрицы A^q, B^q, вектор-строка c^q и вектор d^q считаются заданными для каждой вершины $q \in V$.

Для висячих вершин дерева (V, E) задачи (2)–(3) являются задачами линейного программирования, для остальных вершин задачи (2)–(3) определяются рекуррентно. Известно (см., например, [1]), что функции $\varphi^q(x^q)$, $q \in V$, являются выпуклыми.

Для корневой вершины оптимизационная задача от параметров не зависит (или, что эквивалентно, значения параметров зафиксированы).

Совокупность задач (2)–(3) для всех вершин дерева (V, E) может быть представлена одной задачей линейного программирования большой размерности, обладающей вложенной структурой. В случае, когда дерево состоит из корня и набора висячих вершин, эта задача является квазиблочной задачей со связывающими переменными [1] и с дополнительными ограничениями (3). Задача (2)–(3) для корневой вершины является координирующей задачей в схеме декомпозиции по переменным.

2. Рассмотрим выпуклую параметрическую задачу следующего вида: найти

$$\Phi(x) = \min_y \{(c, y) + F(x, y)\} \tag{4}$$

при ограничениях

$$Ay \le d - Bx . \tag{5}$$

Пусть задана некоторая кусочно-линейная нижняя аппроксимация $H(x, y)$ для функции $F(x, y)$: $H(x, y) \le F(x, y)$,

$$H(x, y) = \max_i \left\{(h_x^i, x) + (h_y^i, y) + \eta_i ,\ i = 1,..., I\right\} . \tag{6}$$

Положим $\xi^*(x) = \min_y \{(c, y) + H(x, y) : Ay \le d - Bx\}$. Очевидно, $\xi^*(x) \le \Phi(x)$.

Пусть значение x зафиксировано. Нетрудно видеть, что

$$\xi^*(x) = \min_{y,\xi} \xi \tag{7}$$

при ограничениях

$$\xi \ge (h_x^i, x) + (c + h_y^i, y) + \eta_i ,\ i = 1,..., I , \tag{8}$$

$$Ay \le d - Bx . \tag{9}$$

Обозначим

$w_i, i = 1,..., I$ - двойственные переменные, соответствующие ограничениям (8), $w = (w_1,..., w_I)$;

u - вектор двойственных переменных, соответствующих ограничениям (9);

G - матрица, строками которой являются векторы $c + h_y^i$, $i = 1,..., I$;

H_x - матрица, строками которой являются векторы h_x^i, $i = 1,..., I$;

$\eta = (\eta_1,..., \eta_I)$.

Задача, двойственная к (7)–(9), имеет вид: найти

$$\max_{u,w} \{(H_x x + \eta, u) + (Bx - d, w)\} \tag{10}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{I} u_i = 1, \tag{11}$$

$$G^T u + A^T w = 0 , \tag{12}$$

$$u \ge 0,\ \ w \ge 0 . \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Пусть u, w – допустимая точка задачи (10)–(13). Тогда

$$L(x) \equiv (H_x x - \eta, u) + (Bx - d, w) \le \xi^*(x) \le \Phi(x) . \tag{14}$$

Если $u = u(\bar{x}),\ w = w(\bar{x})$ – решение задачи (10–(13) для $x = \bar{x}$, то линейная функция $L(x)$ является опорной для $\xi^*(x)$ и $L(\bar{x}) = \xi^*(\bar{x})$.

Таким образом, если задана некоторая нижняя аппроксимация $H(x, y)$ для функции $F(x, y)$, то соотношение (14) определяет правило построения аппроксимаций для функции $\Phi(x)$.

3. Пусть задана некоторая линейная (нижняя) аппроксимация $H^q(x^q, y^q)$ для функции $\sum\limits_{s\in S(q)} \varphi^s(x^q, y^q)$ в выражении (2) для каждого $q \in V$. Для висячих вершин $H^q(x^q, y^q) \equiv 0$.

Будем называть l-аппроксимацией задачи (2)–(3) следующую задачу: найти

$$\psi^q(x^q) = \min_{y^q}\left\{c^q y^q + H^q(x^q, y^q)\right\}, \tag{15}$$

при ограничениях

$$A^q y^q \le d^q - B^q x^q. \tag{16}$$

Легко видеть, что для висячих вершин задачи (2)–(3) и (15)–(16) совпадают. Для корневой вершины r дерева (V, E) величина ψ^r есть оценка снизу оптимального значения совокупности задач.

ld-аппроксимацией задачи (2)–(3) будем называть задачу: найти

$$\xi^q(x^q) = \min_{y^q}\left\{c^q y^q + \sum_{s\in S(q)} \psi^s(x^q, y^q)\right\} \tag{17}$$

при ограничениях

$$A^q y^q \le d^q - B^q x^q. \tag{18}$$

Заметим, что ld-аппроксимация для каждой висячей вершины есть квазиблочная задача линейного программирования со связывающими переменными с дополнительными ограничениями (18). Для висячих вершин задачи (17)–(18) и (15)–(16) совпадают.

Аппроксимации $H^q(x^q, y^q),\ q \in V$ назовем согласованными, если $\psi^q(x^q) \le \xi^q(x^q),\ q \in V$.

Обозначим I^q множество индексов параметров вершины $q \in V$, т.е. $x^q = (x_i,\ i \in I^q)$. Положим

$$x = (x_i,\ i \in \bigcup_{q\in V} I^q). \tag{19}$$

Пусть некоторым образом определены значения компонент вектора $\bar{x}$. Тем самым определены значения переменных $\bar{y}^q$ для каждой вершины $q \in V$, не являющейся висячей.

Вектор $\bar{x}$ будем называть допустимым, если для каждой невисячей вершины выполняются ограничения (3), а для висячих вершин ограничения (3) определяют непустые множества.

Обозначим V^* множество висячих вершин дерева (V, E). Пусть задан набор неотрицательных чисел $\varepsilon = (\varepsilon^q,\ q \in V \setminus V^*)$.

Согласованные аппроксимации $H^q(x^q, y^q),\ q \in V \setminus V^*$ будем называть ε-сбалансированными в допустимой точке $\bar{x}$, если

$$0 \le c^q \bar{y}^q + \sum_{s \in S(q)} \psi^s(\bar{x}^q, \bar{y}^q) - \psi^q(\bar{x}^q) \le \varepsilon^q,\ q \in V \setminus V^*. \qquad (20)$$

Заметим, что соотношение (20) для фиксированного q есть условие ε^q-оптимальности решения $\bar{y}^q$ квазиблочной задачи (17)–(18) при $x^q = \bar{x}^q$.

Лемма. Пусть аппроксимации $H^q(x^q, y^q),\ q \in V \setminus V^*$ являются ε- сбалансированными в точке $\bar{x}$. Тогда $\bar{x}$ – σ-оптимальное решение совокупности задач (2)–(3), поставленных в соответствие вершинам дерева (V, E), где $\sigma = \sum_{q \in V \setminus V^*} \varepsilon^q$.

Доказательство. Для висячих вершин q обозначим $\vartheta^q(\bar{x}^q)$ оптимальное значение задачи линейного программирования (2)–(3). Для остальных вершин величины $\vartheta^q(\bar{x}^q)$ определим рекуррентно:

$$\vartheta^q(\bar{x}^q) = (c^q, \bar{y}^q) + \sum_{s \in S(q)} \vartheta^s(\bar{x}^q, \bar{y}^q). \qquad (21)$$

Нетрудно видеть, что ϑ^r – значение целевой функции на приближенном решении $\bar{x}$, где r – корень дерева (V, E). Обозначим V^q множество всех потомков вершины q, $q \in V^q$, $\sigma^q = \sum_{s \in V^q \setminus V^*} \varepsilon^s$. Покажем, что

$$\vartheta^q(\bar{x}^q) - \psi^q(\bar{x}^q) \le \sigma^q. \qquad (22)$$

Пусть все потомки вершины q – висячие вершины. Тогда с учетом (21) условия (20) и (22) эквивалентны, т.е. $\overline{y}^q$ есть ε^q-оптимальное решение задачи (17)–(18) при $x^q = \overline{x}^q$. Пусть неравенство (22) выполняется для всех потомков вершины q. Покажем, что тогда это неравенство справедливо и для вершины q. Учитывая (21), (20), получаем

$$\vartheta^q(\overline{x}^q) - \psi^q(\overline{x}^q) \le \varepsilon^q + \sum_{s \in S(q)} \vartheta^s(\overline{x}^q, \overline{y}^q) - \sum_{s \in S(q)} \psi^s(\overline{x}^q, \overline{y}^q) \le \varepsilon^q + \sum_{s \in S(q)} \sigma^s = \sigma^q .$$

Откуда при $q = r$ (r - корень дерева (V, E)) получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

4. При использовании схем декомпозиции для решения квазиблочных задач со связывающими переменными возникают определенные трудности при определении значений связывающих переменных, для которых все подзадачи имеют решения. Для преодоления этих трудностей в [1] предложена специальная регуляризация исходной задачи, заключающаяся во введении вспомогательных переменных для каждого ограничения подзадач. Вспомогательные переменные вводятся в целевую функцию с большими штрафными коэффициентами, что обеспечивает эквивалентность исходной и регуляризованной задач.

В дальнейшем предполагается, что аналогичная регуляризация проведена для совокупности задач (2)–(3).

Обозначим $\xi^q(x^q, y^q)$ значение целевой функции задачи (17)–(18) в допустимой точке y^q:

$$\xi^q(x^q, y^q) = c^q y^q + \sum_{s \in S(q)} \psi^s(x^q, y^q) . \tag{23}$$

$P(\varepsilon^q)$-процедурой решения ld-аппроксимации (квазиблочной задачи (17)–(18)) для заданного $q \in V$ и фиксированного x^q назовем процедуру поиска ε^q-оптимального решения y^q этой задачи и построения (уточнения) аппроксимации $H^q(x^q, y^q)$, для которых выполняется

$$0 \le \xi^q(x^q, y^q) - \psi^q(x^q) \le \varepsilon^q, \; q \in V . \tag{24}$$

Для реализации $P(\varepsilon^q)$-процедуры могут использоваться методы негладкой оптимизации [1], методы секущих плоскостей [3–5] и др. Алгоритмы негладкой оптимизации, например *r*-алгоритмы, используются в схеме декомпозиции по переменным для решения негладкой координирующей задачи. При этом для вычисления субградиентов необходимо найти оптимальные значения двойственных переменных для подзадач квазиблочной задачи. Для решения квазиблочной задачи по схеме декомпозиции Бендерса [6] строятся опорные и отсекающие гиперплоскости, которые добавляются в координирующую линейную задачу. Для этого также необходимо найти оптимальные значения двойственных переменных для подзадач квазиблочной задачи. Решение подзадач линейного программирования по обеим схемам декомпозиции и координирующей задачи для схемы Бендерса может проводиться специализированными программами симплекс-алгоритма.

Сравнительный анализ различных подходов к решению квазиблочных задач со связывающими переменными описан в [10]. Вычислительные эксперименты показывают, что для задач с большим числом ограничений в подзадачах и малым числом переменных более предпочтительными оказываются схемы декомпозиции, основанные на методах негладкой оптимизации. Для программной реализации более простыми являются схемы, основанные на методах секущих плоскостей и программных средствах линейного программирования.

В дальнейшем будем предполагать, что в нашем распоряжении имеется некоторая реализация $P(\varepsilon^q)$-процедуры.

Пусть задан вектор $\varepsilon = (\varepsilon^q,\ q \in V)$. Рассмотрим $A(\varepsilon)$-алгоритм поиска допустимой точки x и построения ε-сбалансированных аппроксимаций $H^q(x^q, y^q),\ q \in V$ в этой точке. Будем предполагать заданными некоторые начальные аппроксимации $H_0^q(x^q, y^q),\ q \in V$.

Пусть для каждой вершины $q \in V$ заданы некоторая текущая аппроксимация $H^q(x^q, y^q)$ и допустимая точка (x^q, y^q). Векторы (x^q, y^q) согласованы согласно (1), вектор x определен в соответствии с (19).

Рассмотрим связное поддерево $B = (V_b, E_b)$ дерева (V, E), содержащее корневую вершину r. Поддерево B будем называть ε-сбалансированным для аппроксимаций $H^q(x^q, y^q),\ q \in V_b$ в точке x, если условие (24) выполняется для всех $q \in V_b$.

На каждой итерации рассматриваемого $A(\varepsilon)$-алгоритма анализируется и модифицируется некоторое текущее ε-сбалансированное поддерево B (если $V_b = \varnothing$, то поддерево B будем называть пустым), текущие вектор (точка) x, аппроксимация $H^q(x^q, y^q)$ для всех $q \in V$, ε^q-оптимальное решение y^q для всех висячих вершин поддерева B. Считается заданным параметр алгоритма $\gamma,\ 0 < \gamma < 1$.

Приведем описание $A(\varepsilon)$-алгоритма**.**

Шаг 0. Положить $V_b = \varnothing$ (B - пустое поддерево).

Шаг 1. Выбрать вершину $q \in V \setminus V_b$, для непосредственного предка p которой выполняется $p \in V_b$. Если $V_b = \varnothing$, выбрать корневую вершину дерева.

Шаг 2. Если для текущей точки (x^q, y^q) выполняется условие (24), добавить вершину q в поддерево B и перейти на шаг 5.

Шаг 3. Применить $P(\gamma\varepsilon^q)$-процедуру к вершине q, пусть y^q - полученное ε^q-оптимальное решение.

Шаг 4. Исключить непосредственного предка p и всех его потомков из поддерева B.

Шаг 5. Если поддерево B совпадает с исходным деревом (V,E), Закончить процесс вычислений (искомая точка x и ε-сбалансированные аппроксимации построены), иначе перейти на шаг 1.

Приведем некоторые пояснения шагов 3 и 4. Применение $P(\gamma\varepsilon^q)$- процедуры к вершине q приводит к уточнению аппроксимации $H^q(x^q, y^q)$, что в свою очередь приводит к увеличению разности $\xi^p(x^p, y^p) - \psi^p(x^p)$ для непосредственного предка p вершины q. При нарушении условия (24) для вершины p необходимо повторно уточнять аппроксимацию для этой вершины и искать уточненное решение y^p, т.е. применять $P(\gamma\varepsilon^p)$- процедуру. В случае $0 < \gamma < 1$ при малом увеличении разности $\xi^p(x^p, y^p) - \psi^p(x^p)$ не приходится повторно применять $P(\gamma\varepsilon^p)$- процедуру.

5. Для построения начальных аппроксимаций $H_0^q(x^q, y^q)$, $q \in V$ зададимся некоторым числом $\delta > 0$ и начальной точкой (x^q, y^q) для каждой вершины $q \in V$.

Для висячих вершин q дерева (V,E), очевидно, имеем $H^q(x^q, y^q) \equiv 0$.

Пусть для вершин $s \in S(q)$ аппроксимации $H^s(x^s, y^s)$ уже построены, $S(q)$ – множество непосредственных потомков вершины q. Применяя $P(\delta)$-процедуру к вершине q, получаем какое-то решение y^q и некоторую аппроксимацию $H^q(x^q, y^q)$ для вершины q. Продолжая этот процесс рекуррентно получаем начальные аппроксимации $H^q(x^q, y^q)$ для всех вершин q исходного дерева (V,E).

6. Алгоритм решения (SA-алгоритм) совокупности задач (2)–(3) для всех вершин дерева (V,E) состоит в итеративном применении $A(\varepsilon)$-алгоритма.

На первой итерации определяется начальное значение вектора $\varepsilon = (\varepsilon^q, q \in V)$.

На каждой итерации уточняются (уменьшаются) значения компонент вектора ε и применяется $A(\varepsilon)$-алгоритм.

Процесс прекращается при достижении требуемой точности.

Характер поведения $A(\varepsilon)$-алгоритма зависит от выбора вектора ε и правил его уточнения на каждой итерации. Нетрудно видеть, что при относительно малых ε^q для вершин дерева, близких к корню (по сравнению с удаленными от корня вершинами), соответствующие ld-аппроксимационные задачи решаются часто и с большой точностью, при этом используются грубые аппроксимации $H^s(x^s, y^s)$ для их потомков.

В случае, когда выбираются относительно малые ε^q для вершин дерева близких к висячим, чаще решаются ld-аппроксимационные задачи для этих вершин и используются более точные аппроксимации $H^s(x^s, y^s)$ для их потомков. В последнем случае точки, относительно которых строятся точные аппроксимации, могут быть достаточно далеки от оптимальных.

Ю.П. Лаптін, О.П. Лиховид

ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ІЗ ВКЛАДЕНОЮ СТРУКТУРОЮ

Розглядаються квазіблочні задачі із зв'язуючими змінними, в яких кожен блок (підзадача) у свою чергу є квазіблочною задачею. Для розв'язування запропонована схема декомпозиції, заснована на побудові лінійних апроксимацій та пошуці ε-оптимальних рішень підзадач. Особливістю алгоритма є можливість узгодження точності апроксимацій для різних підзадач.

Yu.P. Laptin, O.P. Lykhovyd

ONE APPROACH TO SOLUTION OF OPTIMIZATION PROBLEMS WITH THE NESTED STRUCTURE

Quasiblock problems with connecting variables, in which every block (subproblem) in turn is a quasiblock problem, are considered. For solving these problems the decomposition scheme based on construction of linear approximations and searching ε-optimal solutions of subproblems was proposed. A particular feature of the algorithm is a possibility of coordination of approximations for different subproblems.

1. *Shor N. Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.
2. *Михалевич М.В., Сергиенко И.В.* Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. – Киев: Наук. думка, 2005. – 670 с.

3. *Mayer J.* Stochastic Linear Programming Algorithms: a Comparison Based on a Model Management System. – Amsterdam: Overseas PublishersAssociation, 1998. – 153 p.
4. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming. – New York: John Wiley & Sons Ltd, 1994. – 227 p.
5. *Birge J.R., Donohue Ch.J., Holmes D.F., Svintsitski O.G.* A parallel implementation of the nested decomposition algorithm for multistage stochastic linear programs // Mathematical Programming. – 1996. – N 75. – P. 327–352.
6. *Benders J.F.* Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems // Numerische Mathematik. – 1962. – N 4. – P. 238–252.
7. *Лаптин Ю.П.* Декомпозиция по переменным для некоторых задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 98 – 104.
8. *Лаптин Ю.П.* ε-субградиенты в методах декомпозиции по переменным для некоторых задач оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2003. – № 2. – С. 75 – 82.
9. *Лаптин Ю. П. Журбенко Н. Г.* Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 47 – 55.
10. *Лиховид А.П.* О реализации алгоритма решения двухэтапной стохастической задачи с фиксированной рекурсией // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2000. – С. 19–23.

Получено 29.04.2007