Теорія
оптимальних
рішень

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

РАВНОВЕСИЯ КУРНО–НЭША И КУРНО–ШТАКЕЛЬБЕРГА–НЭША ДЛЯ ДРОБНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Показано, что для дробных целевых функций классическое равновесие Курно–Нэша может иногда давать отдачу ниже 100 %. Предлагается понятие приемлемого равновесия Курно–Нэша. Последнее является проекцией классического равновесия на построенное множество. Для дробных целевых функций выпуск фирмы превышает выпуск фирмы в точке картельного оптимума, но отношение соответствующих прибылей неопределенное. Понятие равновесия Курно–Нэша обобщается на случай целевых функций, которые являются выпуклыми комбинациями соответствующих прибылей и рентабельностей.

Введение. Значение введения понятия равновесия Нэша, отмеченного Нобелевской премией в 1994 г., сравнивают со значением открытия структуры ДНК. В данной работе показано, что для дробных целевых функций, характерных для принятия финансовых решений [1, 2], это понятие решения требует дальнейшего развития.

Важной частью линейного и нелинейного программирования является оптимизация дробной функции – отношения одной функции к другой [1–5]. Такая целевая функция часто возникает при оптимизации свеклосахарного агропромышленного комплекса, оптимальном управлении сезонными произ-водствами, рационализации отраслевых связей между поставщиками сырья и произ-водителями конечной продукции, матема-тическом моделировании рационального топливно-энергетического баланса государ-ства [6], решении производственных и распределительных транспортных задач, планировании перевозочных процессов на автомобильном транспорте, определении транспортной сети и структуры подвижного состава, маршрутизации автомобильных грузовых перевозок [2].

Если в указанных задачах учитывать конкуренцию между различными видами сырья (например, сахарной свеклой и сахарным тростником, углем и горючими смесями) или перевозок (например, автомобильных, железнодорожных и водных), то необходимо рассматривать нескольких лиц, принима-ющих решения (ЛПР) [1, 5, 7, 8].

Предположим, однородный продукт производят только два ЛПР – фирмы 1 и 2. Пусть функция обратного спроса на этот продукт задается

$$P = a - bQ, \tag{1}$$

где P – (положительная) цена продукта; Q – его количество (объем), выпущенное (и проданное) фирмами; a, b – положительные параметры. Фирма i выпускает объем $q_i \geq 0$ и имеет затраты c_i на выпуск единицы продукции, $i = 1,\ 2$. Заметим, что

$$Q = q_1 + q_2. \tag{2}$$

Пусть фирма $i = 1,\ 2$ выбирает объем q_i своего выпуска, пытаясь максимизировать как свою прибыль

$$\pi_i = Pq_i - c_i q_i, \tag{3}$$

так и свою рентабельность

$$\vartheta_i = Pq_i / (c_i q_i). \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть q^* – оптимальное решение задачи дробного программирования (ЗДП) максимизации по q функции рентабельности

$$\vartheta = (\langle p, q\rangle + u) / (\langle c, q\rangle + v)$$

при условиях

$$\langle c, q\rangle + v \neq 0,$$

$W = \{q \in R^n : Aq \leq w\}$ – непустой ограниченный полиэдр,

где p и c – вектор цен и затрат соответственно; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^n; u и v – скаляры, указывающие фиксированные выигрыш и затраты соответственно; A – матрица размерностью $m \times n$; $w \in R^m$. Тогда пара

$$\alpha^* = 1/(\langle c, q^*\rangle + v),$$

$$z^* = \alpha^* q^*$$

является решением задачи линейного программирования (ЗЛП) максимизации по (α, z) модифицированной функции числителя

$$\langle p, z\rangle + \alpha u$$

при ограничениях

$$Az - \alpha w \leq 0,$$

$$\langle c, z\rangle + \alpha v = 1,$$

$$\alpha \geq 0,$$

где $\alpha = 1/(\langle c, q\rangle + v)$; $z = \alpha q$.

Предположим без ограничения общности, что $\langle c, q\rangle + v > 0 \quad \forall q \in W$. Тогда $\alpha > 0$. Убедимся, что (α^*, z^*) – допустимая точка ЗЛП. Действительно,

$$Az^* = A(\alpha^* q^*) = \alpha^* (Aq^*) \leq \alpha^* w,$$

$$\langle c, z^* \rangle + \alpha^* v = \langle c, \alpha^* q^* \rangle + \alpha^* v = \alpha^* \langle c, q^* \rangle + \alpha^* v = \alpha^* (\langle c, q^* \rangle + v) = 1.$$

Если (α, z) – любая допустимая точка ЗЛП, то $\alpha > 0$: в противном случае $\alpha = 0$, откуда $Az \le 0$, $\langle c, z \rangle = 1$, что противоречит ограниченности W. Тогда $q = z / \alpha$ является допустимой точкой ЗДП: $Aq = Az / \alpha \le w$. При этом

$$(\langle p, q \rangle + u) / (\langle c, q \rangle + v) \le (\langle p, q^* \rangle + u) / (\langle c, q^* \rangle + v),$$

$$\alpha \langle p, q \rangle + \alpha u = \alpha (\langle p, q \rangle + u) \le \alpha^* (\langle p, q^* \rangle + u) = \alpha^* \langle p, q^* \rangle + \alpha^* u,$$

$$\langle p, z \rangle + \alpha u = \langle p, \alpha q \rangle + \alpha u \le \langle p, \alpha^* q^* \rangle + \alpha^* u = \langle p, z^* \rangle + \alpha^* u,$$

откуда (α^*, z^*) – решение ЗЛП.

Аналогично, если (α^*, z^*) – решение ЗЛП, то $q^* = z^* / \alpha^*$ – решение ЗДП.

Для максимизации своих прибыли и рентабельности фирма $i = 1,\ 2$ может максимизировать их выпуклую комбинацию

$$f_i = \alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) \vartheta_i = \alpha_i (P - c_i) q_i + (1 - \alpha_i) P q_i / (c_i q_i) =$$
$$= \alpha_i [a - c_i - b(q_1 + q_2)] q_i + (1 - \alpha_i)[a - b(q_1 + q_2)] / c_i, \qquad (5)$$

где $\alpha_i \in (0,1]$.

Класс целевых функций (5) развивает класс функций, состоящих из суммы линейной и дробно-линейной функций [9–11].

При данных $\alpha_i \in (0,1]$, $i = 1,\ 2$, обобщенным (generalized) равновесием Курно–Нэша (Cournot–Nash) назовем такое сочетание выпусков q_1^g и q_2^g, что

$$f_1^g = f_1(q_1^g, q_2^g) \ge f_1(q_1, q_2^g) \qquad (6)$$

для любых неотрицательных q_1, а также

$$f_2^g = f_2(q_1^g, q_2^g) \ge f_2(q_1^g, q_2) \qquad (7)$$

для любых неотрицательных q_2.

Теорема 2. В условиях (1)–(5), а также

$$a + c_2 > 2c_1, \qquad (8)$$

$$a + c_1 > 2c_2, \qquad (9)$$

$$4b / [4b + 2c_1(c_1 + a)] < \alpha_1 \le 1, \qquad (10)$$

$$4b / [4b + 2c_2(c_2 + a)] < \alpha_2 \le 1, \qquad (11)$$

сочетание

$$q_1^* = \{\alpha_1 c_1 b(1 - \alpha_2) + \alpha_2 c_2 [b(1 - \alpha_1) + \alpha_1 c_1 (a + c_2 - 2c_1)]\} / (3\alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 b), \qquad (12)$$

$$q_2^* = \{\alpha_2 c_2 b(1 - \alpha_1) + \alpha_1 c_1 [b(1 - \alpha_2) + \alpha_2 c_2 (a + c_1 - 2c_2)]\} / (3\alpha_1 \alpha_2 c_1 c_2 b) \qquad (13)$$

является обобщенным равновесием Курно–Нэша.

Заметим, что неравенство (8) – это условие (6) в [8], неравенство (9) – это условие (7) в [8], а в формуле (12) $q_1^* > 0$ ввиду неравенств (8), (10), (11).

Следствие 1. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ получаем утверждение теоремы 1 [8].

Следствие 2. В условиях теоремы 1 рыночный выпуск в обобщенном равновесии Курно–Нэша

$$Q^g = q_1^g + q_2^g = \{2[\alpha_1 c_1 b(1-\alpha_2) + \alpha_2 c_2 b(1-\alpha_1)] + \\ + \alpha_1\alpha_2 c_1 c_2 (2a - c_1 - c_2)\}/(3\alpha_1\alpha_2 c_1 c_2 b).$$

Следствие 3. В условиях теоремы 1 рыночная цена в обобщенном равновесии Курно–Нэша

$$P^g = a - bQ^g = \{\alpha_1\alpha_2 c_1 c_2 (a + c_1 + c_2) - \\ - 2[\alpha_1 c_1 b(1-\alpha_2) + \alpha_2 c_2 b(1-\alpha_1)]\}/(3\alpha_1\alpha_2 c_1 c_2) > 0.$$

Следствие 4. Если $c = c_i$, $\alpha = \alpha_i$, $i = 1,2$, то

$$P^g = [\alpha c(a + 2c) - 4b(1-\alpha)]/(3\alpha c),$$

Лемма 1. Если в условиях следствия 4

$$1 \ge \alpha \ge 4b/[4b + c(a - c)],$$

то рентабельность ϑ_i каждой фирмы $i = 1,\ 2$ не меньше 100 %.

Следует отметить, что лемма 1 предусматривает более высокие значения веса α_i прибыли в целевой функции (5), чем условия (10), (11).

Рассмотрим более сложную, чем функция (4), функцию рентабельности

$$\Theta_i = Pq_i/(f + cq_i), \tag{14}$$

где f – положительные фиксированные затраты каждой фирмы, $c = c_i$, $i = 1,2$. Пусть цель каждой фирмы $i = 1,\ 2$ состоит в максимизации дробного функционала (14), знаменателем которого является линейная функция, а числителем – билинейная функция.

Тогда равновесием Курно–Нэша для целевых функций (14) называем такое сочетание q_1^C и q_2^C, что

$$\Theta_1^C = \Theta_1(q_1^C, q_2^C) \ge \Theta_1(q_1, q_2^C)$$

для произвольных неотрицательных значений q_1, а также

$$\Theta_2^C = \Theta_2(q_1^C, q_2^C) \ge \Theta_2(q_1^C, q_2)$$

для произвольных неотрицательных значений q_2.

Лемма 2. Если выполняются условия

$$0 \le f \le (a - c)^2/(8b), \tag{15}$$

$$q = q_1 = q_2,$$

$$q^- = \{a - c - [(a-c)^2 - 8bf]^{0.5}\}/(4b) \le q \le \\ \le q^+ = \{a - c + [(a-c)^2 - 8bf]^{0.5}\}/(4b), \tag{16}$$

то рентабельность каждой фирмы $i = 1,\ 2$ не меньше 100 %:

Теорема 3. При условиях (1)–(3), (14), (15) равновесие Курно–Нэша дают стратегии

$$q^* = q_1^* = q_2^* = [-3bf + (9b^2 f^2 + 4abcf)^{0.5}]/(2bc).$$

В картельном оптимуме максимизируется по q_1, q_2 значение картельного критерия, представляющего отношение суммарного дохода к суммарным затратам картеля

$$\Theta = P(q_1 + q_2)/[2f + c(q_1 + q_2)] = [a - b(q_1 + q_2)](q_1 + q_2)/[2f + c(q_1 + q_2)].$$

Теорема 4. В картельном (cartel) оптимуме

$$q^c = q_1^c = q_2^c = \{-2bf + [2bf(2bf + ac)]^{0.5}\}/(2bc).$$

Теорема 5. В условиях теорем 3 и 4 $q^* > q^c$.

Лемма 3. Если ограничение (15) удовлетворяется как верхнее равенство, то $q^c = q^+ = q^-$.

Теорема 6. Прибыль фирмы в равновесии Курно–Нэша больше прибыли фирмы в картельном оптимуме для дробных целевых функций тогда и только тогда, когда сумма выпусков фирмы в этом равновесии и этом оптимуме меньше, чем выпуск фирмы как лидера по Штакельбергу (Stackelberg leader) [8]:

$$q^* + q^c < q^{Sl} = (a - c)/2b.$$

Теорема 6 объясняет, почему фирма $i = 1,\ 2$ может максимизировать выпуклую комбинацию (5) своих прибыли и рентабельности.

Лемма 4. При условиях (1)–(3), (14), (15) равновесие Курно–Нэша может давать рентабельность ниже 100 %.

Приведем пример. Если $a = 3.9$, $b = 1$, $c = 1$, $f = 1$, то условие (15) удовлетворяется:

$$(a - c)^2 = (3.9 - 1)^2 = 8.41 > 8 = 8bf.$$

Тогда

$$q^* = [-3 + (9 + 4 \times 3.9)^{0.5}]/2 = (-3 + 4.96)/2 = 0.98,$$

$$q^+ = [3.9 - 1 + (8.41 - 8)^{0.5}]/4 = 0.89 < 0.98 = q^*.$$

Условие (16) леммы 2 не выполняется, а рентабельность ниже 100 %:

$$\Theta_i = (a - 2bq^*)q^*/(f + cq^*) =$$

$$= (3.9 - 2 \times 0.98)0.98/(1 + 0.98) = 1.94 \times 0.98/1.98 < 1.$$

Лемма 4 доказана.

В связи с леммами 2 и 4 приемлемым (reasonable) равновесием Курно–Нэша для целевых функций (14) назовем такое сочетание q_1^{RC} и q_2^{RC}, что $q_1^{RC} = q_2^{RC}$ является проекцией точки q^* на отрезок $[q^-, q^+]$.

Условие (15) фактически ограничивает барьер f входа в новый (монополистический) рынок [12]. Такой барьер может превышать величину прибыли фирмы в равновесии Курно–Нэша [8]. Если условие (15) не имеет места, то вход в новый рынок предусматривает определенную внешнюю (например, государственную или международную) поддержку. С другой стороны, это условие указывает и прогнозирует отрасли, нуждающиеся в подобной поддержке. Выпуск фирмы в картельном оптимуме ниже равновесного по Курно–Нэшу, но разность прибылей фирмы в этих оптимуме и равновесии неоднозначна, что объясняет развитие исследований более сложных целевых функций, чем функции прибыли.

Предположим, ЛПР 2 является последователем по Штакельбергу с целевой функцией прибыли

$$\pi_2 = (P-c)q_2 - f = [a-c-b(q_1+q_2)]q_2 - f\,, \tag{17}$$

а ЛПР 1 – лидером по Штакельбергу с дробной (fractional) целевой функцией

$$\Theta_1 = Pq_1/(f+cq_1) = [a-b(q_1+q_2)]q_1/(f+cq_1)\,. \tag{18}$$

Тогда функция реакции последователя определяется уловием максимизации по q_2 его прибыли:

$$0 = \partial\pi_2/\partial q_2 = a-c-2bq_2-bq_1\,,$$

$$q_2 = (a-c-bq_1)/(2b)\,. \tag{19}$$

В свою очередь, зная реакцию последователя, лидер выбирает свой выпуск, максимизируя свою рентабельность:

$$0 = \partial\Theta_1/\partial q_1 = [(a-bq_2-bq_1\partial q_2/\partial q_1-2bq_1)(f+cq_1)-cq_1(a-bq_1-bq_2)]/$$

$$/(f+cq_1)^2\,,$$

$$0 = [a-(a-c-bq_1)/2+bq_1-2bq_1)(f+cq_1)-cq_1[a-bq_1-(a-c-bq_1)/2] =$$

$$= (f+cq_1)(2a-a+c+bq_1+bq_1-4bq_1)/2-cq_1(2a-a+c+bq_1-2bq_1)/2\,,$$

$$0 = (f+cq_1)(a+c-2bq_1)-cq_1(a+c-bq_1) =$$

$$= af+cf-2bfq_1+acq_1+c^2q_1-2bc(q_1)^2-acq_1-c^2q_1+bc(q_1)^2\,,$$

$$bc(q_1)^2+2bfq_1-f(a+c)=0\,,$$

$$q_1^{FS} = \{-bf+[b^2f^2+bcf(a+c)]^{0.5}\}/(bc)\,. \tag{20}$$

При этом условие $q_2 \geq 0$ означает

$$q_1 \leq (a-c)/b\,,$$

$$-bf+[b^2f^2+bcf(a+c)]^{0.5} \leq c(a-c)\,,$$

$$b^2f^2+bcf(a+c) \leq c^2(a-c)^2+2bcf(a-c)+b^2f^2\,,$$

$$abcf+bc^2f \leq c^2(a-c)^2+2abcf-2bc^2f\,,$$

$$0 \leq c^2(a-c)^2+abcf-3bc^2f\,,$$

$$0 \leq c(a-c)^2+bf(a-3c)\,.$$

Последнее неравенство выполняется при

$$a \geq 3c\,; \tag{21}$$

если же $a < 3c$, то $q_2 \geq 0$ обеспечивается условием

$$f \leq c(a-c)^2 /[b(3c-a)] . \tag{22}$$

Теорема 7. Предположим, целевые функции последоветеля и лидера равны (17) и (18) соответственно. Пусть выполняется условие (21); если условие (21) не выполняется, то пусть имеет место неравенство (22). Тогда в равновесии Курно–Штакельберга–Нэша величина выпуска лидера определяется формулой (20), а последователя – формулой (19).

Следствие 5. В условиях теоремы 7 рыночный выпуск

$$Q^{FS} = q_1^{FS} + q_2^{FS} = q_1^{FS} + (a-c-bq_1^{FS})/(2b) = (a-c+bq_1^{FS})/(2b) .$$

Следствие 6. В условиях теоремы 7 рыночная цена

$$P^{FS} = a - bQ^{FS} = a - (a-c+bq_1^{FS})/2 = (a+c-bq_1^{FS})/2 > 0 .$$

Неотрицательность прибыли последователя в равновесии Курно–Штакельберга–Нэша означает [12]

$$0 \leq \pi_2^{FS} = (P^{FS} - c)q_2^{FS} - f = (a-c-bq_1^{FS})^2/(4b) - f ,$$

$$2\sqrt{bf} \leq a - c - bq_1^{FS} .$$

Если последнее неравенство, с учетом соотношения (20), не выполняется, то $q_2^{FS} = 0$, т.е. фирма 2 не входит в рынок.

Неотрицательность прибыли лидера в равновесии Курно–Штакельберга–Нэша означает, при условии (15),

$$0 \leq \pi_1^{FS} = (P^{FS} - c)q_1^{FS} - f = (a-c-bq_1^{FS})q_1^{FS}/2 - f ,$$

$$b(q_1^{FS})^2 - (a-c)q_1^{FS} + 2f \leq 0 ,$$

$$\{a-c-[(a-c)^2 - 8bf]^{0.5}\}/(2b) \leq q_1^{FS} \leq \{a-c+[(a-c)^2 - 8bf]^{0.5}\}/(2b) . \tag{23}$$

Если неравенство (23), с учетом соотношения (20), не выполняется, то $q_1^{FS} = 0$, т.е. фирма 1 не входит в рынок.

Следствие 7. Если выполняется условие (23) , то $q_1^{FS} \leq (a-c)/(2b) = q_1^S$; $q_2^{FS} \geq q_2^S$; рыночный выпуск Q^S [8, 12], соответствующий целевой функции последователя (17) и целевой функции лидера $\pi_1 = (P-c)q_1 - f$, не меньше, чем Q^{FS} . Отсюда $P^S \leq P^{FS}$, а прибыль последователя π_2^{FS} не меньше, чем π_2^S .

Таким образом, для последователя на рынке с барьером для входа прибыльнее, чтобы лидер имел дробную целевую функцию рентабельности вместо традиционной билинейной функции прибыли. Заметим, что на фондовых рынках применяются, как правило, дробные целевые функции [1, 2].

Заключение. Задача дробно-линейного программирования сводится к задаче линейного программирования. В то же время поиск равновесий Курно–Нэша и Курно–Штакельберга–Нэша при дробных целевых функциях требует ряда дополнительных модификаций для получения приемлемых результатов.

В.М. Горбачук

РІВНОВАГИ КУРНО–НЕША ТА КУРНО–ШТАКЕЛЬБЕРГА–НЕША ДЛЯ ДРОБОВИХ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ

Для дробових цільових функцій рівновага Курно–Неша може давати віддачу нижче 100 %. Пропонується прийнятна рівновага Курно–Неша. Остання є проекцією класичної на побудовану множину. Для дробових цільових функцій випуск фірми перевищує випуск фірми в картельному оптимумі, але співвідношення відповідних прибутків невизначене. Поняття рівноваги Курно–Неша узагальнюється на випадок опуклих комбінацій відповідних прибутків і рентабельностей.

W.M. Gorbachuk

THE EQUILIBRIA OF COURNOT–NASH AND COURNOT–STACKELBERG–NASH FOR FRACTIONAL OBJECTIVE FUNCTIONS

For fractional objective functions, the Cournot–Nash equilibrium may give returns below 100 %. The reasonable Cournot–Nash equilibrium is suggested. The latter is a projection of the classical one onto the constructed set. For fractional objective functions, a firm's output in Cournot--Nash equilibrium exceeds a firm's output in cartel optimum, but relation of corresponding profits is uncertain. The concept of Cournot–Nash equilibrium is generalized to a case of convex combinations of corresponding profits and returns.

1. *Горбачук В.М.* Фінансові методи. – К.: Альтерпрес, 2002. – 175 с.
2. *Кирилюк В.С., Норкин В.И., Домрачев В.Н.* Подход непараметрических индексов для оценивания субъектов финансового рынка по соотношению доходность-риск на примере коммерческих банков // Проблемы управления и и информатики. – 2002. – № 6. – С. 120–131.
3. *Шор Н.З., Соломон Д.И.* Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 204 с.
4. *Горбачук В.М., Гаркуша Н.І.* Вимірювання ефективності методами математичного програмування // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фізико-математичні науки. – 2005. – № 3. – С. 251–255.
5. *Горбачук В.М., Гаркуша Н.І.* Максимізація функції доходу та мінімізація функції витрат у дворівневому програмуванні // Там само. – № 4. – С. 147–152.
6. *Чернов Ю.П., Степаненко И.Д., Ланге Э.Г.* Проблемы оптимального функционирования сезонных производств. – Фрунзе: Илим, 1979. – 261 с.
7. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
8. *Горбачук В.М.* Обобщенное равновесие Курно–Штакельберга–Нэша // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 1. – С. 3–9.
9. *Тетерев А.Г.* Об одном обобщении линейного и дробно-линейного программирования // Экономика и математические методы. – 1969. – № 3. – С. 440–447.
10. *Schaible S.* A note on the sum of a linear and linear fractional functions // Naval research logistics quarterly. – 1977. – **24.** – P. 691–693.
11. *Chadha S.S.* Dual of the sum of a linear and linear fractional program // European journal of operational research. – 1993. – **67.** – P. 136–139.
12. *Горбачук В.М.* Решение задачи двухуровневого программирования для билинейных разрывных функций // Компьютерная математика. – 2005. – № 2. – С. 44–51.

Получено 05.04.2007