УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК

О СТРУКТУРЕ ГРАФА РАЗЛОЖЕНИЙ ОБРАЗУЮЩИХ ОДНОРОДНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Работа завершает исследование однородных NA-графов, обращая внимание, в основном, на графы с четным числом вершин. Подробно исследована структура графа разложений образующих данного NA-графа.

Введение. Проведено исследование однородных натуральных арифметических графов (NA-графов) с нечетным числом вершин [1]. Был введен граф разложений образующих $R(n)$ и выявлен ряд свойств таких графов. Данная работа продолжает начатое исследование в [2] и предполагает провести анализ структуры однородных натуральных арифметических графов с четным числом вершин.

Прежде чем, рассматривать регулярные NA-графы с четным числом вершин, рассмотрим некоторые операции на графе разложений $R_1(n)$. Как известно, элементарным гомоморфизмом в графах называется отождествление (стягивание) двух смежных вершин. Назовем радиальным гомоморфизмом графа $R_1(n)$, у которого $\beta \geq 1$, последовательность операций:

а) удаление всех висячих вершин;

б) перекодировка оставшихся вершин по правилу $y_i = \dfrac{x_i}{2} + 1$.

Полученный граф в результате этой операции обозначим $Gr(R_1(n))$. Так как после удаления висячих вершин останутся только четные вершины, то вторая операция корректна. После выполнения первой операции коды висячих вершин в графе имеют вид $4i$, где $i = 1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$. Применяя операцию б) к этим вершинам, получим все нечетные коды от 3 до n. Число удаленных вершин равно $n-1 = 2^{\beta}(2m+1)$, а число оставшихся вершин равно $2n-3-(n-1) = n-2 = 2^{\beta}(2m+1)-1$.

Структура оставшегося графа совпадает со структурой $R_1(n')$, где $n' = 2^{\beta-1}(2m+1)+1$. Операция б) превращает коды графа $R_1(n)$ в коды графа $R_1(n')$, у которого $N' = 2n'-3 = 2[2^{\beta-1}(2m+1)+1]-3 = 2^{\beta}(2m+1)-1$. Если обозначить зависимость графа $R(n)$ от параметров β и m как $R(m,\beta)$, то в результате радиального гомоморфизма получаем зависимость $Gr(R(m,\beta)) = R(m,\beta-1)$.

Это означает, что в результате радиального гомоморфизма в графе $R_1(n)$ удаляются все висячие вершины, образующие вилки. После $\beta-1$ операций радиального гомоморфизма в графе останется $2(2m+1)+1$ вершин.

Лемма 1. Граф разложений $R_1(2^{\beta}+1)$ представляет собой бинарное дерево с корневой вершиной $u = n+1$.

Действительно, $n = 2^{\beta}+1$ только при $m = 0$. После $\beta-1$ последовательных радиальных гомоморфизмов получаем $n' = 3$ с $U = \{3,4,5\}$. Это вилка с вершиной $u = 4$, т. е. $u = n'+1$. Путем добавления β раз вилок к висячим вершинам можно восстановить исходный граф, который будет бинарным деревом. Вершина самого верхнего уровня имеет код $2^{\beta}+2$, т. е. $u = n+1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, все графы $R_1(n)$ можно свести к $R_1(4m+3) = R(m,1)$, где $m > 0$.

Число m будем называть кардинальным числом графа разложений $R_1(n)$.

Обозначим $\mu_2(b)$ наибольшее нечетное число, на которое делится b.

Если $n = 4m+3$, то все графы $R_1(n)$ будут иметь только один уровень, где будут все числа вида $4k \quad (k = 1,2,\ldots,2m+1)$. От этих вершин идут ребра в остаточное множество, которое можно разделить на две равные части V и W в зависимости от формул, по которым они образовываются

$$V = \{v_l = 2(4l-1) = 8l-2, \quad l = 1,2,\ldots,m\},$$

$$W = \{w_k = 2(4k-n) = 8(k-m-1)+2, \quad k = m+2, m+3,\ldots,2m+1\}.$$

Рассмотрим множество перестановок S_m из m элементов

$$S_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Характеристической перестановкой для графа разложений образующих $R_1(4m+3)$ назовем такую перестановку $f_m = \{i \Rightarrow \frac{\mu_2(m+i)+1}{2}\}$, где $i = 1,2,\dots,m$.

Очевидно, что данное отображение будет перестановкой, т. е., при этом получаются все числа от 1 до m. Предположим обратное, что в результате получаем два одинаковых числа: $i_1 = \frac{\mu_2(m+i)+1}{2}$, $i_2 = \frac{\mu_2(m+j)}{2}$, где $1 \le i, j \le m$. Если $i > j$, то $i = (2^p - 1)m + 2^p \cdot j \quad (p \ge 1)$. Отсюда следует, что $i > m$, а это не может быть по виду самого определения функции $\mu_2(b)$. Поэтому получаются все числа разные и не больше m.

Определение 2. Весом элемента i на перестановке S_m называется величина

$$\lambda(i) = \left\lfloor \log_2\left(\frac{m}{2i-1}\right) \right\rfloor + 2 .$$

Теорема 1. Граф разложений образующих $R_1(4m+3)$ состоит из $p+1$ компонент связности, из них одна – цепь длиной 3, а остальные компоненты содержат ровно один цикл из вершин остаточного множества. Число p равно числу циклов в характеристической перестановке $f_m \in S_m$, а длина каждого цикла равна сумме весов элементов соответствующего цикла в f_m.

Покажем, что множества V и W не пересекаются. Действительно, если это так, то найдутся k и l, такие, что $8k - 2n = 8l - 2$, или $8k - 8m - 6 = 8l - 2$. Отсюда следует: $2l = 2(k-m) - 1$, что невозможно.

Рассмотрим последовательность $x_s = 2x_{s-1} - 2$, где $x_1 \in V$. Для любого $s \ge 2$ всегда $x_s = 2^{s-1}x_1 - 2^s + 2$. Если подставить значение $x_1 = 8l - 2 \in V$, получаем $x_s = 2^{s+1} \cdot (2l-1) + 2$, т.е., для $s \ge 2$ все члены последовательности принадлежат W. При этом для разных l_1 и l_2 данные последовательности не имеют общих членов. В противном случае, если какие-то $x_s = x_r$, или $2^{s+1}(2l_1+1) = 2^{r+1}(2l_2+1)$, то это возможно только при $s = r$ и $l_1 = l_2$, что противоречит предположению. Итак, каждый элемент множества V служит начальным членом последовательности, в которой последующие члены принадлежат W. Так как V и W равномощны, то эти последовательности исчерпывают множество W. Наибольший член данного множества W_k получим при $k = 2m+1$, т.е. $w_{\max} = 8m+2$. Так как $x_s \le w_{\max}$, решая неравенство при фиксированном i в последовательности будет $s_{\max} = \left\lfloor \log_2 \frac{m}{2i-1} \right\rfloor + 2$ членов. Будем различать наименьший и наибольший члены данной последовательности. Каждая последовательность – цепочка разложений наибольшей образующей данной последовательности на левые составляющие разложений. Это разложение можно продлить на один шаг вниз, полагая $s = 0$, получаем $x_0 = 4l$, т.е. первую половину вершин первого уровня. Аналогично, приходим к выводу, что максимальные значения последовательностей составляют остаточные элементы, превышающие $n+1$, но их порядок зависит от конкретного значения m. Однако каждый элемент множества $v_i \in V$ разлагается на образующую $4i$ и на конечный элемент последовательности, начальный элемент которой $x_0 = 4j$. Так как разница между $4i$ и этим конечным элементом должна быть $n-1 = 4m+2$, то j находим из уравнения

$$4i + 4m + 2 = (4j)\cdot 2^s - 2^{s+1} + 2 \quad (s > 0), \quad (i = 1,2,\dots m)\,. \tag{1}$$

Отсюда находим $2j-1 = \frac{i+m}{2} = \mu_2(i+m)$, так как $2j-1$ – нечетное число. В результате $j = \frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$. Рассмотрим отображение $i \Rightarrow \frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$. Докажем, что оно является перестановкой из S_m, т.е. при изменении i от 1 до m j пробегает разные значения. Для $m = 2, 3$ можно проверить непосредственно, это перестановки (2, 1) и (1, 3, 2). Пусть утверждение справедливо для произвольного m, докажем то же самое для $m+1$. Так как $i + m = (i-1) + (m+1)$, начиная с $i = 2$ и до $i = m$, элементы в f_m равны соответствующим элементам в f_{m+1}, начиная с $i = 1$ и до $i = m-1$. Все они по индукции различны, остается определить два элемента для $i = m$ и $i = m+1$.

Первый элемент равен $\frac{\mu_2(m+m+1)+1}{2} = \frac{2m+1+1}{2} = m+1$, а второй – $\frac{\mu_2(m+1+m+1)+1}{2} = \frac{\mu_2(m+1)+1}{2}$, т.е. первому элементу в f_m. Оба данные элементы прежде не появлялись, поэтому имеем способ построения с перестановкой. Это доказательство дает способ построения всех перестановок для произвольного m по индукции. Для того, чтобы записать все f_m, считая f_2 и f_3 заданными, необходимо следовать таким правилам:

переписать все, кроме первого, элементы из f_{m-1};

записать элемент m;

записать первый элемент из f_{m-1}.

Все эти перестановки для $m = 2,3,\ldots,20$ приведены в табл.1, а их представление в виде циклов – в табл. 2 (для $m \leq 16$).

Заметим общие закономерности табл. 1:

– номер числа m находится на $(m-1)$-м месте в перестановке;

– число i в следующей перестановке находится на месте, номер которого на $l(\mathrm{mod}\, m)$ меньше, чем в предыдущей перестановке.

Достаточно двух правил , чтобы построить полную таблицу.

ТАБЛИЦА 1. Перестановки при $2 \leq m \leq 20$

m	Перестановки
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	3, 2, 4, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	4, 1,5, 3, 6, 2
7	1, 5, 3, 6, 2, 7, 4
8	5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1
9	3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5
10	6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3
11	2, 7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6
12	7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2
13	4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7

Окончание табл.1

m	Перестановки
14	8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4
15	1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8
16	9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1
17	5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9
18	10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9,18, 5
19	3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9,18, 5,19,10
20	11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8, 16, 1, 17, 9, 18, 5, 19, 10, 20, 3

ТАБЛИЦА 2. Таблица циклов в перестановках

m	Коды циклов
2	$(1^3,2^1)$
3	$(1^3)(2^2,3^1)$
4	$(1^4,3^1,4^1)(2^2)$
5	$(1^4,2^2,4^1,5^1,3^2)$
6	$(1^4,4^1,3^2,5^1,6^1,2^3)$
7	$(1^4)(2^3,5^1)(3^2)(4^2,6^1,7^1)$
8	$(1^5,5^1,7^1,8^1)(2^3,3^2,6^1,4^2)$
9	$(1^5,3^2,2^3,6^1,8^1,9^1,5^2,4^2,7^1)$
10	$(1^5,6^1)(2^3)(3^3,7^1,9^1,10^1)(4^2)(5^2,8^1)$
11	$(1^5,2^3,7^1,5^2)(3^3,4^2,8^1,10^1,11^1,6^2,9^1)$
12	$(1^5,7^1,10^1,6^2,5^2,9^1,11^1,12^1,2^4,4^2)(3^3,8^1)$
13	$(1^5,4^2,9^1,6^2,10^1,12^1,13^1,7^2,3^3)(2^4,8^1,11^1)(5^2)$
14	$(1^5,8^1,6^2,3^3,9^1,12^1,7^2,11^1,13^1,14^1,4^3,5^2,10^1,2^4)$
15	$(1^5)(2^4,9^1)(3^3,5^2)(4^3,10^1,8^1)(6^2,11^1,7^2)(8^2,12^1,14^1,15^1)$
16	$(1^6,9^1,13^1,15^1,16^1)(2^4,5^2,11^1,14^1,8^2)(3^3,10^1,7^2,12^1,4^3)(6^2)$

Число циклов или компонент на множестве вершин остаточного множества определяется числом циклов в соответствующей перестановке. Еще одну компоненту в $R_1(n)$ дает образующая $n+1=4(m+1)$, которая разлагается на две нечетные образующие $u_1=2m+3$ и $u_2=2(m+1)+n=6m+5$, что в сумме дает цепь длиной 3. Циклам в перестановке из f_m соответствует цикл в графе $R_1(n)$, если вместо одного элемента перестановки брать соответствующую последовательность вершин.

Теперь можно выбирать любые образующие для регулярного графа. Если взять нечетную образующую, то ее дополнением может быть четная образующая либо типа $4i$, либо из остаточного множества. Второй случай исключается, следовательно, остается $4i$, которая разлагается на две нечетные. Всего получается 4 образующие и граф регулярный степени 2. Если взять четную образующую типа $4i$, то вместе с дополняющей нечетной и двумя нечетными по разложению получатся те же 4, которые дают регулярный граф степени 2. Если взять четную образующую из остаточного множества, то нужно брать все образующие одной компоненты, которые дают регулярный граф степени $2z$, где z – число вершин в цикле. Пользуясь теоремой 1 и табл. 1 и 2, можно построить граф $R_1(n)$ для любого $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

Рассмотрим пример: $m=3$, $n=15$.

По табл. 1 и 2 находим перестановку и ее представление в циклах $(1^3)(2^2,3^1)$. Граф $R_1(15)$ состоит из трех компонент. Для $i=1$ находим образующую $v_1=8i-2=6$. Вес элемента 1 равен 3, т.е. цепочка длиной 3 составляет цикл. Находим его элементы: $v_2=2v_1-2=10$, $v_3=2v_2-2=18$. Первая компонента составляет цикл из остаточных образующих (6, 10, 18) и всех образующих после их разложения. Для второй компоненты находим $i=2$, $v_1=8i-2=14$. Эта цепочка состоит из двух вершин, поэтому $v_2=2v_1-2=26$. Для третьей вершины $i=3$, $v_3=8i-2=22$ Таким образом, вторая компонента состоит из цикла (14, 26, 22) и образующих, полученных от их разложения. Третья компонента состоит из образующей $n+1=16$ и ее разложения 9 и 23. Граф $R_1(15)$ показан на рисунке.

Рассмотрим случай $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$. Так как нечетная образующая имеет своим дополнением также нечетную образующую, то степень регулярности графа может быть любой, если выбирать только нечетные образующие. Если взять четную образующую, то для выяснения вопроса о существовании регулярных графов необходимо построить граф разложения образующих $R_0(n)$, который строится по тому же принципу, что и $R_1(n)$. Каждая четная образующая разлагается обязательно на одну четную и одну нечетную, так как разница между их значениями равна $n-1$, т.е. нечетному числу.

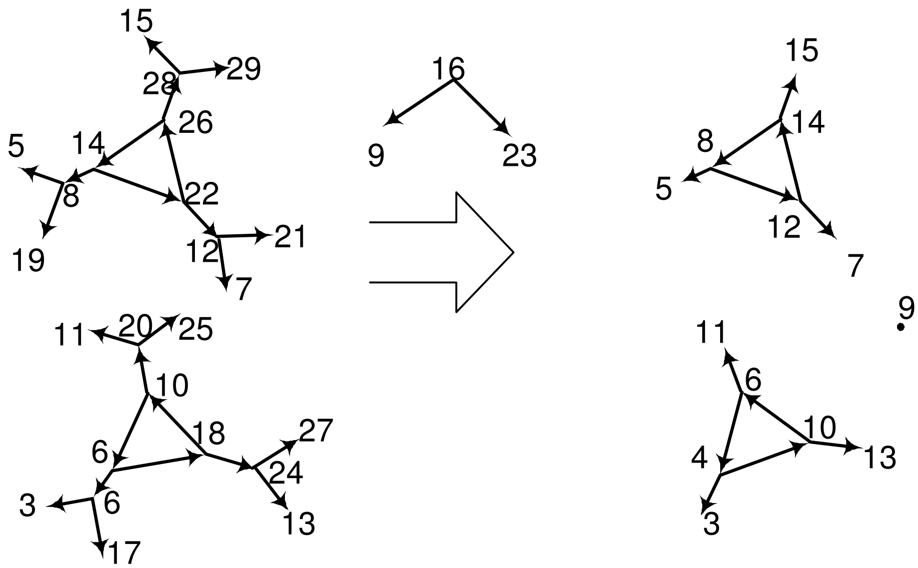

РИСУНОК. Граф $R_1(15) = Gr(R_1(29)),\ R_0(8) = Gr(R_1(15)), \quad m = 3$

Теорема 2. Граф разложений $R_0(2m+2)$ состоит из $p+1$ компонент связности, из которых одна является вершиной $n-1$, а остальные компоненты содержат ровно один цикл из вершин остаточного множества. Число p равно числу циклов в перестановке $f_m \in S_m$, $f_m = \{i \Rightarrow \frac{\mu_2(m+i)+1}{2}\}$, а длина каждого цикла в графе равна сумме весов элементов соответствующего цикла в f_m. При этом $m = \frac{n-2}{2}$, а вес элемента определяется так же, как и в $R_1(n)$.

Образуем последовательности такого же типа, как и для $R_1(n)$ $x_s = x_1 2^{s-1} - 2^s + 2$, где в качестве x_1 берем образующую $4i$. Наибольшее значение образующей равно $2n-1$, поэтому $i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Нетрудно показать, что $x_s \neq 4i$ при любом s, i и $k \geq 1$. Обозначим $m = \frac{n}{2} - 1$ и, как прежде, будем называть его кардинальным числом графа $R_0(n)$. Тогда получаем m разных непересекающихся последовательностей, таких, как и для $R_1(n)$, с единственным отличием, что здесь x_1 принадлежит последовательности, и x_s не должно превышать максимальное значение четных образующих, что так же $(4i)2^s - 2^{s+1} + 2 \le 4m + 2$. Отсюда длина цепочки $\lambda(i) = s = \left\lfloor \log_2\left(\frac{m}{2i-1}\right) \right\rfloor + 2$. Так как начальный элемент цепочки $4i$ разлагается на нечетную образующую $2i+1$ и четную образующую $2i + n = 2(i+m) + 2$, которая должна быть максимальным элементом другой цепочки, то решив уравнение

$$2(i+m) + 2 = 4ij \cdot 2^s - 2^{s+1} + 2 \tag{2}$$

находим $2j - 1 = [i+m]/2^s = \mu_2(i+m)$. Так как $2j-1$ – нечетное число, тогда $j = \frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$, приходим к тому же результату, что в теореме 1.

Таким образом, для определения структуры графа $R_0(n)$ можно воспользоваться табл.1 и 2, которые составлены для $R_1(n)$, выбирая строку с заданным m.

Рассмотрим граф $R_0(n)$ для $n = 8$. При этом $m = 3$ и в табл.1 находим соответствующую перестановку (1,3,2), состоящую из двух циклов. Подставим в них вес элементов: $\lambda(1) = 3$, $\lambda(2) = 2$, $\lambda(3) = 1$. В результате получаем граф (на рисунке справа). Из рисунка видно, что этот граф получен из графа $R_1(n)$ для $m = 3$ путем радиального гомоморфизма.

Следствие. Граф, полученный с помощью радиального гомоморфизма графа разложений $R_1(4m+3)$ совпадает с графом разложений образующих $R_0(2m+2)$, т. е. $Gr(R_1(4m+3)) = R_0(2m+2)$.

І.Е. Шулінок

ПРО СТРУКТУРУ ГРАФА РОЗКЛАДІВ ТВІРНИХ ОДНОРІДНИХ НАТУРАЛЬНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ГРАФІВ

Робота завершує дослідження однорідних натуральних арифметичних графів за допомогою графів розкладів твірних. Доведено ряд тверджень, які описують структуру графів розкладів твірних, як для парного так і для непарного випадків.

I.E. Shulinok

ABOUT STRUCTURE OF THE GENERATRIXES SEPARATION GRAPH OF THE HOMOGENOUS NATURAL ARITHMETIC GRAPHS

The paper is finished investigated of the homogenous natural arithmetic graphs using the generatrixes separation graph. A number of the assertions were proved. Structure of the ones graphs were described and investigated both for even and odd cases.

1. *Шулинок И.Э.* Структура натуральных арифметических графов с нечетным числом вершин // Оптимизация и ее приложения. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1997. – С. 54 – 60.
2. *Шулинок И.Э., Каюров В.Ю.* Однородные натуральные арифметические графы с нечетным числом вершин // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2006. – № 5. – С. 48 – 53.

Получено 29.04.2007