УДК 519.2
В.И. НОРКИН

# ОБ ОЦЕНКЕ РИСКА КАТАСТРОФИЧЕСКОГО СПАДА В СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА[1]

*Исследуются стохастические модели экономического роста в условиях повторяющихся катастрофических рисков. Основная задача – количественная оценка риска катастрофического экономического спада в таких моделях. В качестве меры риска выступает вероятность падения производства в процентах к начальному уровню. Для данной вероятности как функции степени падения производства выводятся интегральные уравнения, которые подобны интегральным уравнениям страховой математики и которые исследуются аналогично.*



**Введение.** Возрастающая уязвимость современного общества – тревожная тенденция происходящих глобальных изменений. Потери от природных и антропогенных катастроф быстро возрастают, например, за последние два десятилетия прямые потери от природных катастроф увеличились в девять раз [1]. Катастрофы разрушают системы коммуникаций, электроснабжения, ирригации, инфраструктуру. Они влияют на потребление, сбережения и инвестиции. Основная причина роста убытков – отсутствие адекватной оценки рисков, ведущее к концентрации населения и производства в опасных зонах и образование новых опасных производств. Стандартная теория экономического развития, по существу, детерминированная и не учитывает рисков. Она считает, что экономические агенты всегда могут аккумулировать ресурсы для ликвидации последствий катастроф, т.е. предполагается, что катастрофы малы в сравнении с ресурсами всего государства или всего мира [2]. В реальности такая аккумуляция ресурсов может быть неосуществима и требуются более реалистические модели экономического

[1] Работа выполнена при поддержке Украинского научно-технологического центра (УНТЦ), проект G3127.

развития, учитывающие неопределенности и риски. Особенно важны модели, которые объясняют взаимосвязи между уровнем жизни, застоем и экономическими потрясениями. Одна из причин медленного экономического роста – низкая норма сбережений (инвестиций), типичная для слаборазвитых стран [3, 4]. Маловероятно, что страны, в которых большинство жителей имеют доходы, близкие к уровню выживания, смогут обеспечить высокий уровень сбережений и, следовательно, инвестиций. Очевидно, что потрясения влияют на сбережения, но одна только низкая норма сбережений не может объяснить в рамках детерминированных моделей, почему не запускается устойчивый рост экономики.

В работе анализируются две модели экономического роста: известная классическая детерминированная модель роста Харода–Домара [4, 5] в стохастической модификации [6] с шоками, происходящими в случайные моменты времени, а также простая стохастическая модель мультипликативного роста, в которой ежегодный рост или спад производства происходит на случайное, возможно, отрицательное число процентов. Для первой модели анализируется влияние внешних шоков на экономический рост. Шок (кризис) понимается как случайное событие, разрушающее часть капитала страны, в частности, шоком может быть отток капитала из страны. Мы рассматриваем внешние потрясения, кореллированные с уровнем экономического развития, которые соответствуют возрастающим катастрофическим потерям во взаимосвязанных социоэкономических и природных системах. Для рассматриваемых моделей количественно оценивается риск (вероятность) спада производства в процентах к начальному уровню. Показано, что вероятность спада производства как функция уровня спада удовлетворяет интегральным уравнениям, которые встречаются в актуарной математике. Это дает возможность применять для оценки риска спада актуарную теорию и разработанные там количественные методы.

**1. Модель экспоненциального экономического роста и ее стохастическая модификация.** Возможность роста в простой концептуальной модели характеризуется производственной функцией, зависящей от двух факторов: капитал и труд, $Y = F(K, L) = LF(K/L, 1)$, где $Y$ – уровень производства в единицу времени. Поэтому можем характеризовать экономику в терминах отношения капитала к трудовым ресурсам $k = K/L$, и в терминах производительности труда $y = Y/L$, $y = f(k) := F(k, 1)$. Предположим, что выпуск $Y$ разделяется на потребление и сбережение, сбережения равны инвестициям $I$. Экономический рост определяется накоплением капитала за счет инвестиций:

$$\frac{dK}{dt} = I - \delta K,\ K(0) = K_0,\ t > 0, \tag{1}$$

где $\delta$, $0 < \delta < 1$ – норма амортизации капитала. Предположим, что инвестиции $I(t)$ составляют определенную долю $s$, $0 < s < 1$ выпуска, т.е. $I(t) = sY(t)$ и $\gamma$ – параметр экспоненциального роста населения $d/dt\,(\ln L) = \gamma$. Перепишем соотношение (1) в терминах переменной $k$:

$$\frac{dk}{dt} = s\,f(k) - (\gamma+\delta)k,\ \ k(0) = k_0,\ \ t > 0 \tag{2}$$

или

$$\frac{d}{dt}\ln k = s\frac{f(k)}{k} - (\gamma+\delta). \tag{3}$$

Если коэффициент отдачи на единицу капитала постоянен и равен $\theta$, т.е. $y/k = f(k)/k = \theta$, то приходим к известной экспоненциальной модели экономического роста Харода–Домара [4, 5]:

$$\frac{d}{dt}\ln k = s\theta - \gamma - \delta. \tag{4}$$

Согласно (4), темп роста определяется уровнем сбережений $s$ и продуктивностью капитала $\theta$. Так как $y/k = \theta = const$, рост выпуска $d/dt \ln y(t)$ такой же как рост капитала $d/dt \ln k(t)$. Поэтому экспоненциальный рост производства описывается функцией

$$y(t) = y_0 e^{(s\theta-\gamma-\delta)\,t},\ \ t > 0. \tag{5}$$

Экономика – сложная система с постоянным изменением и потрясением или шоком. Катастрофы являются одними из таких потрясений. Будем моделировать шоки путем умножения капитала $k(t)$ или выпуска $y(t)$ на случайную переменную $\nu = \nu(t, y, \omega)$, $0 \le \nu(t, y, \omega) \le 1$, моделирующую влияние шока на текущий выпуск $y(t)$. Например, ущерб от наводнений принято моделировать в терминах процента стоимости затапливаемых объектов [7]. Пусть шоки случаются в случайные моменты времени $t_0 = 0, t_1, t_2, ...,$ $\nu(0, y, \omega) = 1$. Случайная величина шока $\nu$ в нашей модели зависит от агрегированного уровня выпуска $y(t)$. В более реалистических версиях модели $\nu(t, y, \omega)$ зависит также от географического распределения капитала и пространственной структуры шоков и других факторов, влияющих на уязвимость страны. Концентрация инвестиций в зонах или секторах экономики, подверженных повышенному риску тех или иных катастроф, может существенно повлиять на распределение случайной величины $\nu$. Неустойчивость экономики страны по отношению к различным потрясениям, например, к природным катастрофам, может спровоцировать уход капитала из страны в более безопасное место, что в свою очередь может усилить нестабильность. Шоки, в общем случае, трансформируют функцию (5) в чрезвычайно нелинейную (разрывную) случайную функцию:

$$y(t) = y_0 e^{(s\theta-\gamma-\delta)\,t} \prod_{i=1}^{N(t)} \nu_i, \quad t > 0, \tag{6}$$

где $N(t)$ – число шоков на интервале времени $(0,t]$, а $\nu_i$ – размер таких шоков $0 \le \nu_i \le 1$.

Предположим, что случайные переменные $\nu_1, \nu_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены со средним значением $\mu$, и, что они независимы от между шоковых интервалов времени $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Если данные интервалы времени имеют стационарное распределение с математическим ожиданием $\lambda$, то

$$Ey(t) = y_0 e^{(s\theta-\gamma-\delta)t} \mu^{\lambda t} = y_0 e^{(s\theta-\gamma-\delta+\lambda\ln\mu)\,t},$$

т.е. ожидаемый экспоненциальный рост все еще характеризуется линейной по $t$ функцией $(s\theta-\gamma-\delta-\lambda\mu)t$ и рост имеет место, когда уровень инвестиций превышает средний уровень потерь, $(s\theta-\gamma-\delta-\lambda\mu)>0$. При этом реальная траектория роста $y(t,\omega)$ может сильно флуктуировать. Таким образом, для данного $t$ с положительной вероятностью может случиться, что случайные потери превышают совокупный рост $\prod_{i=1}^{N(t)} \nu_i > e^{(s\theta-\gamma-\delta)\,t}$. Данная вероятность отображает уязвимость роста, а вероятность противоположного события выражает устойчивость экономического роста.

**2. Оценка риска стагнации и экономического спада в модели с непрерывным временем.** Под стагнацией будем понимать события $\{\omega : \exists t > 0 : y(t,\omega) < y_0\}$, под экономическим спадом – события $\{\omega : \exists t > 0 : y(t,\omega) < y_0/n\}$, где $n \ge 1$, т.е когда происходит спад производства в $n$ раз по сравнению с начальным уровнем производства $y_0$. В качестве меры риска стагнации и экономического спада рассмотрим вероятности, соответственно, $P\{\inf_{t\ge 0} y(t,\omega) < y_0\}$ и $P\{\inf_{t\ge 0} y(t,\omega) < y_0/n\} =$

$=\psi(n)$. Очевидно, $P\{\inf_{t\ge 0} y(t,\omega) < y_0\} = \psi(1)$. Задача состоит в оценке или вычислении данных вероятностей.

Рассмотрим противоположное событие $\{\omega : \inf_{t\ge 0} y(t,\omega) \ge y_0/n\}$, что когда-либо случается спад не больше, чем в $n$ раз. Для вероятности такого события справедливы оценки

$$P\{\inf_{t\ge 0} y(t,\omega) \ge y_0/n\} = P\{\inf_{t\ge 0} \ln y(t,\omega) \ge \ln(y_0/n)\} =$$
$$= P\{\inf_{t\ge 0}(\ln y_0 + (s\theta-\gamma-\delta)t + \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \nu_i) \ge \ln(y_0/n)\} =$$
$$= P\{\inf_{t\ge 0}(\ln n + (s\theta-\gamma-\delta)t - \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \nu_i) \ge 0\}.$$

Обозначим, $u = \ln n$, $c = s\theta-\gamma-\delta$, $z_i = -\ln \nu_i$,

$$\xi(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} z_i , \tag{7}$$

$\varphi(u) = P\{\inf_{t\ge 0} \xi(t) \ge 0\}$. Пусть $F(\cdot)$ – функция распределения независимых случайных величин $z_i = -\ln \nu_i$, $m = -E\ln \nu_i$ – их среднее значение. Будем также предполагать, что поток шоковых событий – пуассоновский с интенсивностью $\lambda$. При сделанных предположениях $\xi(t)$ является классическим процессом риска с начальным значением $u$, поэтому для его анализа применима теория Крамера–Лундберга [8–11]. Поэтому при условии

$$\frac{\lambda m}{c} = \frac{\lambda E \ln(1/\nu_i)}{s\theta-\gamma-\delta} < 1$$

функция $\varphi(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} + \frac{\lambda m}{c}\int_0^u \varphi(u-z)(1-F(z))dz .$$

Это интегральное уравнение восстановления (типа Вольтерра), которое полностью исследовано, и для его решения существует большое число разнообразных подходов [8–11], в частности, итерационный метод [12]. По определению, вероятность спада более чем в $n$ раз выражается функцией $\varphi(\cdot)$ как $\varphi(\ln n)$. В частности, вероятность стагнации задается выражением

$$P\{\inf_{t\ge 0} y(t,\omega) < y_0\} = 1-\varphi(0) = \frac{\lambda m}{c} = \frac{\lambda E \ln(1/\nu_i)}{s\theta-\gamma-\delta}.$$

Пусть $L$ – положительный корень (константа Лундберга) уравнения

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Lz}(1-F(z))dz = 1,$$

тогда справедлива оценка

$$P\{\inf_{t\geq 0} y(t,\omega) < y_0/n\} = \psi(n) = 1-\varphi(\ln n) \leq e^{-L\ln n}, \quad n \geq 1.$$

Существуют обобщения модели Крамера–Лундберга на случай процессов восстановления с непуассоновскими потоками событий [10, 11]. Они применимы также для анализа процессов роста (10) с непуассоновскими моментами шоков $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$. Пусть $K(t)$ обозначает распределение случайного момента времени $t_1$ до первого шока, а $K_0(t)$ – распределение независимых случайных интервалов времени между последовательными шоками $t_{i-1}$ и $t_i$, $i > 1$. Как и прежде, будем считать, что коэффициенты поражения производственных фондов $\nu_i$ при $i$-ом шоке независимы, одинаково распределены и не зависят от моментов наступления шоков, $F(\cdot)$ – функция распределения случайных величин $\ln(1/\nu_i)$. Тогда функция $\varphi(u) = P\{\inf_{t\geq 0}\xi(t) \geq 0\}$ может быть найдена с помощью интегральной формулы [10, (3.72)]:

$$\varphi(u) = \int_0^{+\infty}\int_0^{u+ct} \varphi_0(u+ct-z)dF(z)dK(t),$$

где $\varphi_0(\cdot)$ является решением интегрального уравнения [10, (3.74)]:

$$\varphi_0(u) = \int_0^{+\infty}\int_0^{u+ct} \varphi_0(u+ct-z)dF(z)dK_0(t) \tag{8}$$

с граничным условием $\varphi_0(+\infty) = 1$. Достаточные условия существования решения уравнения (8) и метод последовательных приближений для его нахождения исследованы в [13].

**3. Оценка риска в модели роста с дискретным временем.** Пусть время $t$ – дискретно, $t = 0, 1, 2, \ldots$, например, обозначает номер года на временной шкале. Предположим, что валовый объем производства $y(t)$ изменяется таким образом:

$$y(t+1) = y(t)\nu_t = y_0 \prod\nolimits_{\tau=0}^{t} \nu_\tau, \quad y(0) = y_0, \tag{9}$$

где $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с общей функцией распределения $\Phi(\cdot)$ и математическим ожиданием $\bar{\nu} > 1$. Траектории последовательности (9) случайны, нас интересуют последовательности $\{y(t)\}$, ведущие к спаду производства в $n$ раз, $n \geq 1$, т.е. такие, что $\inf_{t\geq 0} y(t) < y_0/n$. Представим

$$P\{\inf_{t\geq 0} y(t) < y_0/n\} = P\{\inf_{t\geq 0} \prod_{\tau=0}^{t-1} \nu_\tau < 1/n\ \} =$$

$$= P\{\inf_{t\geq 0} (\ln n + \sum_{\tau=0}^{t-1} \ln \nu_\tau) < 0\}.$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = u + \sum_{\tau=0}^{t} z_\tau ,$$

где $z_\tau = \ln \nu_\tau$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(\cdot)$. Обозначим

$$\varphi(u) = P\{\inf_{t\geq 0} \xi(t) \geq 0\}.$$

Очевидно, искомая вероятность спада выражается функцией $\varphi(\cdot)$ таким образом:

$$\varphi(1/n) = P\{\inf_{t\geq 0} y(t) < y_0/n\}.$$

В свою очередь функция $\varphi(u)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\varphi(u) = \int_{-u}^{+\infty} \varphi(u+z) dF(z), \qquad \varphi(+\infty) = 1, \tag{10}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега–Стильтеса. Пусть $A$ – оператор, задаваемый правой частью уравнения (10), $A\varphi(u) = \int_{-u}^{+\infty} \varphi(u+z) dF(z)$. Оператор $A$ определен на неубывающих ограниченных на неотрицательной полуоси функциях $\varphi$.

**Лемма 1.** Очевидно, оператор $A$ – линейный, сохраняющий монотонность функций, изотонный (т.е. переводит большую функцию в большую) и нерастягивающий.

**Лемма 2.** $A\mathbf{1} = \int_{-u}^{+\infty} dF(z) = 1 - F(-u) \leq 1$.

**Лемма 3.** Пусть существует положительное число $L$, такое, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lz} F(z) dz \leq 1, \qquad \lim_{u\to-\infty} e^{-Lu} F(u) = 0. \tag{11}$$

Тогда для функции $\varphi_*(u) = 1 - e^{-Lu}$ выполнено $A\varphi_*(u) \geq \varphi_*(u)$ для любого $u \geq 0$.

*Доказательство.* Действительно, в предположениях (11) справедливы оценки

$$A\varphi_*(u) = \int_{-u}^{+\infty} \varphi_*(u+z)dF(z) = \int_{-u}^{+\infty} (1-e^{-L(u+z)})dF(z) =$$

$$= (1-e^{-L(u+z)})F(z)\Big|_{-u}^{+\infty} - L\int_{-u}^{+\infty} e^{-L(u+z)}F(z)dz =$$

$$= 1 - Le^{-Lu}\int_{-u}^{+\infty} e^{-Lz}F(z)dz \ge 1 - Le^{-Lu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lz}F(z)dz =$$

$$\ge 1 + e^{-Lu}(e^{-Lz}F(z)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lz}dF(z)) \ge 1 - e^{-Lu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lz}dF(z) \ge 1 - e^{-Lu} = \varphi_*(u).$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (11) и существует $\varepsilon > 0$, такое, что $F(\varepsilon) < 1$. Тогда уравнение (10) с граничным условием на бесконечности имеет единственное монотонное решение $\varphi(u)$, такое, что $\varphi_*(u) \le \varphi(u) \le 1$.

*Доказательство.* Определим функцию $\psi_\nu(\cdot)$ с параметром $\nu$,

$$\psi_\nu(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u < \nu, \\ 1, & u \ge \nu. \end{cases}$$

Рассмотрим действие оператора $A$ на ступенчатую функцию $\psi_\nu(u)$:

$$A\psi_\nu(u) = \int_{-u}^{+\infty} \psi_\nu(u+z)dF(z) = \int_{-u+\nu}^{+\infty} dF(z) = 1 - F(-u+\nu).$$

Очевидно, $A\psi_\nu(\nu+\varepsilon) = 1 - F(\varepsilon) < 0$. Таким образом, для любого $\nu \ge 0$ существует не зависящее от $\nu$ число $\varepsilon > 0$, такое, что выполнено соотношение $A\psi_\nu(\nu+\varepsilon) < 1$, которое означает вместе с леммами 1–3, что выполнены достаточные условия существования и единственности решения уравнения (10) из [14, лемма 3 и теорема 2]. Теорема доказана.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 метод последовательных приближений $\varphi^{k+1}(u) = A\varphi^k(u),\ k = 0,1,2,\ldots$, стартующий с произвольной начальной функции $\varphi^0(u)$, такой, что $\varphi_*(u) \le \varphi^0(u) \le 1$, поточечно сходится к решению задачи (10).

Утверждение теоремы 2 следует из результатов [ 14, следствие к теореме 2].

**Заключение.** Любая рациональная стратегия управления взаимосвязанными социально-экономическими и природными системами требует понимания и учета рисков. Существующие модели природных катастроф, например, катастрофических наводнений, дают оценки прямых потерь в виде доли потерянного капитала. В рассмотренных моделях влияние катастроф моделируется с помощью случайных множителей, уменьшающих текущий капитал. Непрямые потери могут быть еще больше. Они включают спад деловой активности, скачки цен, отток капитала и другое. Потеря производственных фондов и капитала приводит к потерям в выпуске, и, следовательно, влияет на зарплаты, доходы, сбережения и инвестиции, что в свою очередь влияет на экономический рост. Потрясения могут давать и более глубокие последствия – они неявно модифицируют экономику и могут вызвать стагнацию и спад даже в случае устойчивого в среднем роста. Актуальной является оценка риска спада в долговременных моделях экономического роста. В работе в качестве меры риска используется вероятность спада в процентах к начальному состоянию экономики. Для вероятности спада как функции степени спада выведены интегральные уравнения, аналогичные интегральным уравнениям страховой математики. Для анализа и решения уравнений применяется развитая в актуарной математике теория, в частности, получены условия существования и единственности решения уравнений и условия сходимости метода последовательных приближений к решению.

*В.І. Норкін*

ПРО ОЦІНКУ РИЗИКУ КАТАСТРОФІЧНОГО СПАДУ В СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

Досліджуються стохастичні моделі економічного зростання за умов катастрофічних ризиків, які повторюються. Основне завдання роботи – кількісна оцінка ризику катастрофічного економічного спаду в таких моделях. Як міра ризику виступає вірогідність падіння виробництва у відсотках до початкового рівня. Для цієї вірогідності як функції ступеня падіння виробництва доводяться інтегральні рівняння, які подібні до інтегральних рівнянь страхової математики і які досліджуються аналогічно.

*V.I. Norkin*

ON THE ASSESSMENT OF DOWNTURN RISK IN STOCHASTIC MODELS OF ECONOMIC GROWTH

In the article stochastic models of economic growth under repetitive catastrophic risks are explored . The basic task of the article is a quantitative estimation of risk of catastrophic downturn in such models. As a measure of risk probability of production falling in percents to the initial level is taken. For this probability as a function of the degree of falling integral equalizations are derived, which are similar to integral equalizations of insurance mathematics and which are explored similarly.

1. *Climate* Change and Increase in Loss Trend Persistence // Press Release. – Munich: Munich Re., 1999.
2. *Arrow J.* The Theory of Risk-Bearing: Small and Great Risks // J. of Risk and Uncertainty. – 1996. – **12.** – P. 103–111.
3. *Easterly W.* Economic Stagnation, Fixed Factors, and Policy Thresholds // J. of Monetary Economics. – 1994. – **33**. – P. 525–557.
4. *Solow R.* Growth Theory, An exposition. – Oxford: Clarendon Press. – 1997. – 300 p.
5. *Ray D.* Development Economics. – Princeton, NJ: Princeton University Press. – 1998. – 434 p.
6. *Ermoliev Y., Ermolieva T., Norkin V.I.* Economic growth under shocks: path dependencies and stabilization. In: Micro-Meso-Macro: Addressing Complex Systems Couplings, H. Liljenstroem, U. Svedin, eds. – London: World Scientific, 2005. – P. 289–302.
7. *Норкин В.И.* Об измерении и профилировании катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 80–94.
8. *Daykin C., Pentikainen T., Pesonen M.* Practical Risk Theory for Actuaries, Monographs on Statistics and Applied Probability. – New York: Chapman & Hall. – 1994. – Vol. 53. – 400 p.
9. *Asmussen S.* Ruin Probabilities. – Singapore: World Scientific. – 2000. – 385 p.
10. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
11. *Эмбрехтс П., Клюппельберг К.* Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и её применения. – 1993. – **38.** – Вып. 2. – С. 374–415.
12. *Норкин Б.В.* О методе последовательных приближений для вычисления вероятности банкротства классического процесса риска // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. – Вип. 2. – С. 10–18.
13. *Норкин Б.В.* О вычислении вероятности банкротства непуассоновского процесса риска методом последовательных приближений // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 2. – С. 133–144.
14. *Норкин Б.В.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 157–164.

Получено 08.05.2007