УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Рассматривается задача многокритериальной комбинаторной оптимизации на размещениях. Обосновано, что эффективные решения задачи находятся в вершинах многогранника размещений. Представлено алгоритм нахождения парето-оптимальных оценок для комбинаторных многокритериальных задач.

Введение. При решении почти каждой сложной практической задачи возникает необходимость в рассмотрении ее модели со многими критериями. Учитывая эти данные в настоящее время бурно развивается теория дискретных оптимизационных многокритериальных задач. При этом не всегда учитываются имеющиеся комбинаторные свойства допустимой области. Многокритериальность в прикладном аспекте позволяет учесть одновременно несколько факторов, показателей, характеристик и дает возможность адекватно моделировать реальные процессы и системы. Сочетание таких проблем приводит к исследованию многокритериальных задач на комбинаторных множествах. Эти проблемы являются сложными каждая сама по себе, а в совокупности они практически не исследовались, т. е. их изучение и решение является достаточно важным и актуальным.

Многокритериальные задачи рассматриваются в [1–5], задачи комбинаторной оптимизации на разных комбинаторных множествах в [6, 7].

Как известно, одним из основных, фундаментальных понятий теории многокритериальности является понятия оптимального по Парето, т. е. эффективного решения.

В настоящей работе рассматриваются задачи оптимизации с несколькими целевыми функциями на комбинаторном множестве размещений и поиск парето-оптимальных решений.

На практике такие задачи возникают, когда необходимо сформулировать и формализовать в виде критериев ряд отдельных требований, которые предъявляются к оптимальному решению. Объединить эти критерии в один, обобщенный, не всегда целесообразно и возможно.

1. Постановка задачи. Для дальнейшего изложения материалы используем понятие мультимножество, что определяется основой и кратностью элементов [6]. Пусть задано мультимножество $A=\{g_1, g_2,..., g_\eta\}$, а $S(A)=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ его основание, кратность элементов $k(e_j)=\eta_j, j\in N_n, \eta_1+\eta_2+...+\eta_n=\eta$, где $e_j\in R_1$, $\forall j\in N_n$. Возьмем произвольное $k\in N_\eta$, $\eta_j\le k$.

Упорядоченной k *-выборкой* мультимножества A называется набор

$$e=(g_{i_1}, g_{i_2},\dots, g_{i_k}), \tag{1}$$

где $g_{i_j}\in A$ $\forall i_j\in N_k$, $\forall j\in N_k, i_s\ne i_t$, если $s\ne t$ $\forall s\in N_k$, $\forall t\in N_k$.

Определение 1 [6]. Множество $P(A)$, элементами которого являются k *-выборки* вида (1) мультимножества A, называется евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольных его элементов $e'=(a_1,a_2,...,a_k)$, $e''=(b_1,b_2,...,b_k)$ выполняются условия: $(e'\ne e'')\Leftrightarrow(\exists j\in J_k: a_j\ne b_j)$, т. е. множество $P(A)$ имеет такие свойства: два элемента множества $P(A)$ отличаются друг от друга, если они независимо от других отличий отличаются порядком размещения символов, что их образуют.

Совокупность всех упорядоченных k-выборок вида (1) мультимножества A будем называть общим множеством k-размещений и обозначим его $P_{\eta n}^k(A)$.

Интерес к евклидовым комбинаторным множествам связан с возможностью рассматривать их как точки R^k, т. е. с возможностью погружения их в арифметическое евклидово пространство R^k.

Пусть $P(A)$ – эвклидово комбинаторное множество, а e вида (1) – элемент $P(A)$. Отображение $f: P(A)\to P_f(A)\subset R^k$ называется погружением множества $P(A)$ в арифметическое эвклидово пространство, если f ставит множеству $P(A)$ во взаимнооднозначное соответствие множеству $P_f(A)\subset R^k$ по правилу: для $e=(g_{i_1},\dots, g_{i_k})\in P(A)$, $x=f(e)$, $x=(x_1...,x_k)\in P_f(A)$, имеем $x_j=g_{i_j}$ $\forall j\in N_k$.

Рассмотрим комбинаторную многокритериальную задачу на множестве размещений.

Пусть линейная вектор-функция f имеет вид

$$f(x) = (\langle c^1, x\rangle, \langle c^2, x\rangle, ..., \langle c^m, x\rangle), \qquad (2)$$

а множество допустимых решений задачи определяется пересечением двух множеств $D = X \cap P_{\eta n}^k(A)$, где множества X задано конечной системой линейных неравенств

$$X = \{x \in R^n \big| \langle a^j, x\rangle \le b_j,\ j \in N_k\}\ ,$$

$$\text{где } a^j \in R^n, b_j \in R,\ j \in N_k, \qquad (3)$$

а множества размещений

$$x \in P_{\eta n}^k(A)\ . \qquad (4)$$

Под решением комбинаторной задачи (2 – 4), будем понимать нахождение элементов $P(f, x)$ – множество парето-оптимальных (эффективных решений). Согласно [5] для произвольного $x \in X$ истинно утверждение:

$$x \in P(f, x) \Leftrightarrow \{y \in X \mid f(y) \ge f(x), f(y) \ne f(x)\} = \varnothing. \qquad (5)$$

В работе [6], рассмотрено решение задач с линейной функцией цели на множестве размещений. Как известно $\Pi_{\eta n}^k(A) = conv P_{\eta n}^k(A)$ и называется общим многогранником размещений. Пусть элементы мультимножества A упорядочены таким образом:

$$g_1 \le ... \le g_\eta\ , \qquad (6)$$

то общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^k(G)$ задается системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1}\ ,\quad \forall\omega \subset N_k\ . \qquad (7)$$

Если $\eta_1 \ge k$, то левая часть неравенств в системе (7) может быть заменена неравенствами $g_1 < x_1\ \forall_i \in N_k$. Если $\eta_n \ge k$, то правая часть неравенств в системе (7) может быть заменена неравенствами $x_i \le g_\eta$, $\forall_i \in N_k$. Если условия $\eta_1 \ge k$, $\eta_n \ge k$ выполняются вместе, то многогранник $\Pi_{\eta n}^k(A)$ преобразуется в куб: $g_1 \le x_i \le g_\eta$, $\forall_i \in N_k$.

Известно из [6], что для задачи нахождения минимума функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j\ , \qquad (8)$$

где $c_{\alpha_1} \geq ...c_{\alpha_s} \geq c_{\alpha_{s+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $s \in N_k$, $\alpha \in N_k$, на общем множестве размещений $P_{\eta n}^k(A)$ минимум достигается в точке $x^* = (x_1^*,...,x_k^*) \in P_{\eta n}^k(G)$, которая удовлетворяет условиям

$$x_{\alpha_i}^* = g_i \forall i \in N_s; \ x_{\alpha_{s+i}}^* = g_{\eta - r + i} \forall i \in N_r, \tag{9}$$

если элементы мультимножества A упорядочены согласно (6), где r, s константы, удовлетворяющие условия $r + s = k$, $r, s \in N_k$.

Учитывая вышеописанное, можно определить условия нахождения решения многокритериальной задачи (2), (4) без дополнительных условий (3). Такую многокритериальную задачу назовем многокритериальной безусловной задачей с линейными критериями на множестве размещений. В некоторых случаях может быть полезным

Утверждение 1. Если B_i – множество перестановок $\alpha^i = (\alpha_1^i,...,\alpha_k^i)$ элементов множества первых натуральных чисел N_k, что удовлетворяют условию

$$C_{\alpha_1^i}^i \geq C_{\alpha_2^i}^i \geq ... \geq C_{\alpha_s^i}^i \geq C_{\alpha_{s+1}^i}^i \geq ... \geq C_{\alpha_k^i}^i, \tag{10}$$

то множество эффективных решений задачи (2), (4) не пусто, если не пусто множество, которое является пересечением множеств решений R_i, найденных для каждого критерия $\langle c_i, x \rangle, i \in N_m$ отдельно:

$$\bigcap_{i=1}^{m} R_i = R \neq \varnothing. \tag{11}$$

Для любой перестановки $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k) \in \mathrm{B}$, точка $x^* = (x_1^*...x_k^*) \in P_{\eta n}^k(A)$, в виде (9) при условии (6), принадлежит множеству эффективных решений.

Доказательство. Понятно, что если $\alpha \in \mathrm{B}$, то $\alpha \in \mathrm{B}_i \forall i \in N_m$, а поэтому точка x^* в виде (9) при условии (6) определяет точку, которая принадлежит одновременно множествам решений для каждого из критериев отдельно (2). Поэтому, точка x^* – оптимальное решение задачи (2), (4).

Вышерассмотренное утверждение не дает ответа на вопрос: какие решения найдены: эффективные, слабо эффективные или строго эффективные.

Но одним из основных понятий многокритериальных задач, как определено выше, является понятия парето-оптимального решения. Для комбинаторных многокритериальных задач оно представляет обобщенное понятие точки максимума числовой функции, т. е. решение парето-оптимально, если значения любого из критериев можно улучшить лишь за счет ухудшения значений остальных критериев.

Свойствам и методам отыскания парето-оптимальных решений посвящена достаточно обширная литература, но для выше сформулированной задачи комбинаторной оптимизации (2 – 4) необходимо учесть специфику и комбинаторные свойства области допустимых решений.

Утверждение 2. Парето-оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях находятся в вершинах многогранника размещений $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$.

Доказательство. Если рассматривать многокритериальную комбинаторную безусловную задачу (2), (4), то согласно утверждению 1 оптимальные решения – точки множества размещений $P_{\eta n}^{k}(A)$. Как известно $\operatorname{vert}\Pi_{\eta n}^{k}(A) = P_{\eta n}^{k}(A)$, то при наложении дополнительных условий (3), эффективные решения также будут в вершинах, поскольку условия (3) только усекают область, которая описывается системой неравенств (7). Понятно, что случай $D = \varnothing$ не рассматривается.

Теорема доказана.

Наряду с множеством парето-оптимальных решений комбинаторной многокритериальной задачи целесообразно рассмотреть множество парето-оптимальных оценок [3]. Вектор $f(x^*)$ при парето-оптимальном решении x^* называют парето-оптимальным вектором оценок, а множество всех таких векторов – множеством парето-оптимальных оценок. Обозначим

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{\, f(x^*) \in Y \mid \text{при некотором } x^* \in P_f(X) \,\}, \qquad (12)$$

где Y означает множество возможных векторов, т. е. $Y = f(x)$.

Благодаря наличию вышеуказанной прямой связи (12) между множествами эффективных решений и парето-оптимальных векторов можно применить алгоритм нахождения множества парето-оптимальных оценок для задачи комбинаторной оптимизации (2 – 4), аналогичный [3].

Алгоритм

Шаг 1. Для всех точек $x = (x_1, ..., x_k) \in P_{\eta n}^{k}(A)$ определить множество возможных оценок $Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}$.

Шаг 2. Образовать множество парето-оптимальных оценок, выбрав $P(Y) = Y$, $i = 1$, $j = 2$, которые совпадают с множеством решений Y.

Шаг 3. Проверить выполнение неравенства $y^i \geq y^j$, если оно выполняется, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 6.

Шаг 4. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^j, перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $j < N$, если оно выполняется, то положить $j = j + 1$ и вернуться к шагу 3. В другом случае необходимо перейти к шагу 8.

Шаг 6. Проверить справедливость неравенства $y^i \geq y^j$, если оно выполняется, перейти к шагу 7, иначе вернуться к шагу 5.

Шаг 7. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^i и перейти к шагу 8.

Шаг 8. Проверить выполнение неравенства $i < N-1$, если оно выполняется, то положить $i = i+1$, а затем $j = i+1$. После этого необходимо вернуться к шагу 3, иначе расчеты закончить. Множество парето-оптимальных оценок построено полностью.

Суть алгоритма состоит в том, что искомое множество парето-оптимальных оценок образуется с последовательным удалением заблаговременно известных неоптимальных векторов.

Задача усложняется, если область возможных решений определяется не только комбинаторными условиями, которые описывают комбинаторный многогранник размещения, а накладываются еще дополнительные ограничения.

Заключение. Исследованы решения комбинаторной многокритериальной задачи. Обоснован подход к нахождению эффективных оценок.

Дальнейшее развитие данной работы будет направлено на разработку алгоритма и исследования множества эффективных решений.

Будет исследована эффективность алгоритма при решении конкретных практических задач.

Л.М. Колєчкіна

ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Розглядається задача багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Показано, що ефективні розв'язки задачі знаходяться у вершинах багатогранника розміщень. Представлено алгоритм знаходження парето-оптимальних оцінок для комбінаторних багатокритеріальних задач.

L.N. Kolechkina

OPTIMUM DECISIONS OF MULTICRITERION COMBINATORIAL PROBLEMS ON PLACING

The problem of multicriterion combinatorial optimization on placing is examined. It is grounded, that the effective decisions of task are in the tops of polyhedron of placing. The algorithm of finding of Pareto-optimum estimations is represented for combinatorial multicriterion problems.

1. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Козерацкая Л.Н.* Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации – как характеристика ее устойчивости

// Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 6. – С. 181 – 184.
3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
4. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 171 с.
5. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4 – С. 90 – 100 .
6. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
7. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.

Получено 17.04.2007