УДК 519.8

Т.А. БАРДАДЫМ

ОСОБЕННОСТИ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИЗБЫТОЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ*

Рассматривается вопрос о целесообразности проведения замены переменных при введении функционально избыточных ограничений, используемых для улучшения лагранжевых двойственных оценок в оптимизационных задачах квадратичного типа. Приведен пример, в котором именно из-за замены переменных оценка квадратичной оптимизационной задачи ухудшается.

Введение. Использовать функционально избыточные квадратичные ограничения для улучшения двойственных квадратичных оценок во многоэкстремальных задачах квадратичного типа предложил Н.З. Шор [1, 2]. Такой подход оказался эффективным во многих полиномиальных и дискретных оптимизационных задачах. Он позволяет получать оценки в таких экстремальных задачах на графах как максимальный разрез графа, оптимальная бисекция графа, максимальное независимое множество вершин графа. Для этих задач в [1–4] исследованы различные семейства функционально избыточных квадратичных ограничений и показано, что их использование во многих случаях улучшает лагранжевы двойственные квадратичные оценки.

П.И. Стецюк в работах [5, 6] предложил новые способы построения функционально избыточных квадратичных ограничений, которые позволяют улучшать двойственные оценки даже в тех случаях, когда это не удается сделать с помощью известных ранее классов ограничений. В работе [6] рассматривается и вопрос о замене переменных при использовании функционально избыточных ограничений. С одной стороны, с помощью такой замены можно уменьшить размерность

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CRDF (Фонда гражданских исследований и развития США, проект UKM2-2812-KV-06).

задачи, а с ней и вычислительные трудности. С другой стороны, как указывалось в [6], оценка, полученная после замены переменных, может оказаться хуже оценки, вычисленной без этой замены, хотя в приведенном в этой работе примере этого не происходит.

В данной статье будет показано, что подобной замены переменных в общем случае следует избегать. В качестве примера ухудшения оценки рассмотрим ту же MaxCut-задачу, что и в [6], но на более сложном графе. Будет показано, что с помощью избыточных ограничений, предложенных в [5], в этой задаче можно получить точную оценку, но только в случае, когда замена переменных не проводится. Несмотря на то, что в данной задаче замена переменных выглядит очень естественной, исключать исходные переменные здесь нельзя, так как при этом описание множества ограничений оказывается неполным, что приводит к ухудшению оценки.

Формулировка задачи. Рассматривается неориентированный граф $G=(V,E)$ со множеством вершин $V=\{1,\ldots,n\}$ и множеством ребер E. Заданы веса w_{ij} ребер $(i,j)\in E$, $w_{ij}=w_{ji}$. Пусть V_1 и V_2 – непустые непересекающиеся подмножества вершин графа G, такие, что $V_1\cup V_2=V$. Разрез $Cut(G)$ графа G – это совокупность тех ребер, вершины которых лежат в разных подмножествах. Вес разреза определяется как сумма весов его ребер. В MaxCut-задаче нужно разбить множество вершин на два подмножества, чтобы соответствующий этому разбиению вес разреза был максимальным. В простейшей модели квадратичного типа, приведенной в [2, 3], MaxCut-задача сводится к нахождению функции

$$mc(G,w)=\max\left(\frac{1}{2}\sum_{(i,j):\,i<j} w_{ij}(1-x_i x_j)\right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i^2=1 \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где бинарные переменные x_i, $i=1,\ldots,n$ задаются в виде

$$x_i=\begin{cases}-1, & \text{если} \quad i\in V_1,\\ +1, & \text{если} \quad i\in V_2.\end{cases}$$

Следуя работе [6], модель (1)–(2) будем называть *A*-моделью, а затем с помощью процедуры, предложенной в [5], начнем вводить дополнительные переменные и ограничения

$$y_{ij}-x_i x_j=0 \qquad \forall\, i,\ j:1\le i,\ j\le\ n \ \text{(10 шт.)}, \tag{3}$$

$$y_{ij}^2-1=0 \qquad \forall\, i,\ j:1\le i,\ j\le\ n \ \text{(10 шт.)}, \tag{4}$$

$$y_{ij}-y_{ik}y_{jk}=0 \qquad \forall\, i,j,\ k:1\le i,\ j,\ k\le\ n \ \text{(30 шт.)} \tag{5}$$

и так далее. (Поскольку $y_{ij} = y_{ji}$, в (5) и в других аналогичных формулах будут учитываться только ограничения, в которых у переменной y_{ij} первый индекс будет меньше второго). Получившуюся модель будем называть *B*-моделью, а соответствующую ей двойственную оценку – $\psi_B^*(G,w)$.

Замена переменных. Для данной задачи совершенно естественным выглядит проведение замены переменных (3), т. е. удаление из *B*-модели переменных x_i, $i=1,\ldots,n$. При этом целевая функция становится в переменных y_{ij}, $1 \le i < j \le n$ линейной:

$$F(G,w) = \max\left(\frac{1}{2}\sum_{(i,j):\, i<j} w_{ij}(1-y_{ij})\right) \quad ,$$

а переменные x_i, $i=1,\ldots,n$ из ограничений (2)–(5) исключаются, т. е. остаются только (4)–(5). Получившуюся модель будем называть *C*-моделью.

Как указывалось в [6], для графа K_3 (3-клика), в котором все веса ребер равны единице,

$$\psi_A^*(K_3) = 2{,}25 > \psi_B^*(K_3) = \psi_C^*(K_3) = 2 = mc(K_3).$$

Действительно, рассмотренный граф K_3 принадлежит семейству графов, не стягиваемых к K_5 (5-клика), и приведенная в [8] оценка, являющаяся следствием *C*-модели (см. [6]), является точной.

Пример. Для изучения вопроса об особенностях замены переменных был выбран полный граф K_5 с пятью вершинами и единичными весами ребер. Лагранжевы двойственные квадратичные оценки определялись с помощью программы DSQTPr [9]. Оказалось, что ни *B*-модель с ограничениями (2)–(5), ни *C*-модель с ограничениями (4)–(5) не дают необходимой точности:

$$\psi_B^*(K_5) = \psi_C^*(K_5) = 6{,}25 > 6 = mc(K_5).$$

Согласно рекомендациям [5], в *B*-модель были введены дополнительные переменные и ограничения:

$$y_{ij}x_k - y_{ik}x_j = 0,\ 1 \le i,\ j,\ k \le n \ \text{(30 шт.)}, \tag{6}$$

$$x_i - y_{ij}x_j = 0,\ 1 \le i,\ j \le n \ \text{(20 шт.)}, \tag{7}$$

$$y_{ij}y_{kl} - y_{ik}y_{jl} = 0,\ 1 \le i,\ j,\ k,\ l \le n \ \text{(15 шт.)}. \tag{8}$$

Соответственно в *C*-модель были добавлены только ограничения (8). Оказалось, что снова

$$\psi_{B_1}^*(K_5) = \psi_{C_1}^*(K_5) = 6{,}25 > 6 = mc(K_5).$$

Тогда количество переменных и ограничений было ещё расширено: кроме ограничений (2)–(5) и (6)–(8) использованы ограничения, приведенные в таблице под номерами 5, 6, 8–12, 22, а также группа ограничений

$$y_{ijk}\,y_{lm} - y_{ijl}\,y_{km} = 0,\ 1 \le i,\ j,\ k,\ l,\ m \le n \text{ (15 шт.)}, \qquad (13)$$

которой нет в таблице. При этом общее количество переменных стало равным 25, ограничений – 375, и удалось получить оценку, весьма близкую к точной:

$$\psi^*_{B_2}(K_5) = 6{,}07\,.$$

Однако в соответствующей модели C_2-модели переменные x после замены исключены, и поэтому нет возможности ввести переменные y_{ijk}, а из ограничений можно использовать только (4)–(5), а также ограничения под номерами 9 и 21 из таблицы. В результате и полученная оценка получается менее точной:

$$\psi^*_{C_2}(K_5) = 6{,}25\,.$$

Возникает вопрос, а можно ли вообще в данной задаче с помощью дополнительных ограничений получить точную оценку? Оказывается, да. Полный набор потребовавшихся для этого дополнительных ограничений приведен в таблице (B_3-модель). Общее количество переменных также было равным 25, ограничений использовано 505. Следует отметить, что в силу сделанных выше замечаний после замены переменных в соответствующей C_3-модели будут использоваться те же ограничения, что и в C_2-модели.

Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Делать замену переменных при использовании техники функционально избыточных ограничений и лагранжевых двойственных квадратичных оценок нецелесообразно. Именно расширение множества переменных задачи и дополнительные ограничения позволяют более подробно описать в лагранжиане то множество, на котором проводится оптимизация целевой функции. Неизбежное при проведении замены исключение отдельных переменных делает описание этого множества менее подробным, что приводит к ухудшению полученных оценок. Совпадение оценок в примере из работы [6] объясняется исключительно простотой рассмотренного графа K_3.

Автор благодарит П.И. Стецюка за предоставленную программу и ценные советы.

ТАБЛИЦА

№ п/п	Ограничения	Количество добавленных ограничений	Оценка
1 2 3 4 5 6	$x_i^2 = 1 \quad \forall i = 1,..., n$ $y_{ij} - x_i x_j = 0 \quad \forall i, \ j: 1 \le i, \ j \le \ n$ $y_{ij} - x_i x_j = 0 \quad \forall i, \ j: 1 \le i, \ j \le \ n$ $y_{ij}^2 - 1 = 0 \quad \forall i, \ j: 1 \le i, \ j \le \ n$ $y_{ijk} - y_{ij} x_k = 0 \quad \forall i, j, k: 1 \le i, \ j, \ k \le \ n$ $y_{ijk}^2 - 1 = 0 \quad \forall i, j, k: 1 \le i, j, k \le \ n$	5 10 10 10 10 10	 6.25001
7	$x_i - y_{ij} x_j = 0, \ 1 \le i, \ j \le n$	20	6.25001
8	$x_i - y_{ijk} y_{jk} = 0, \ 1 \le i, j, k \le n$	30	6.25001
9	$y_{ij} - y_{ik} y_{jk} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k \le n$	30	6.25000
10	$y_{ij} - y_{jik} x_k = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k \le n$	60	6.25000
11	$y_{ij} - y_{ikl} y_{jkl} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, l \le n$	60	6.06839
12	$y_{ijk} - y_{ijl} y_{kl} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, l \le n$	60	6.06829
13	$y_{ijm} y_{klm} - y_{ijp} y_{klp} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, l, m, p \le n$	10	6.06606
14	$y_{ij} x_j - y_{ik} x_k = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k \le n$	15	6.06606
15	$y_{ijk} y_{jk} - y_{ilm} y_{lm} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, l, m \le n$	25	6.06606
16	$y_{ik} y_{jk} - y_{il} y_{jl} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, \ l \le n$	20	6.05960
17	$y_{ijk} x_k - y_{ijl} x_l = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, \ l \le n$	20	6.03872
18	$y_{ijk} y_{jkl} - y_{imp} y_{jmp} = 0, \ 1 \le i, j, k, l, m, p \le n$	20	6.03872
19	$y_{ij} x_k - y_{ik} x_{jk} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k \le n$	30	6.03872
20	$y_{ijl} y_{kl} - y_{ikm} y_{jm} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, \ l, m \le n$	30	6.01143
21	$y_{ij} y_{kl} - y_{ik} y_{jl} = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, \ l \le n$	15	6.00528
22	$y_{ijk} x_l - y_{ijl} x_k = 0, \ 1 \le i, \ j, \ k, \ l, m, p \le n$	15	6.00000

Т.О. Бардадим

ОСОБЛИВОСТІ ЗАМІНИ ЗМІННИХ ПРИ ВИКОРИСТАННІ НАДЛИШКОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

Розглядається питання про доцільність проведення заміни змінних при використанні функціонально надлишкових обмежень, що використовуються для покращення лагранжевих двоїстих оцінок в оптимізаційних задачах квадратичного типу. Наведено приклад, в якому саме через заміну змінних оцінка квадратичної оптимізаційної задачі погіршується.

T.A. Bardadym

CHANGE OF VARIABLES UNDER SUPERFLUOUS CONSTRAINTS: TO DO OR NOT TO DO

The reasonability of change of variables while using superfluous constraints to improve Lagrangean dual bounds in quadratic type optimization problems is considered. An example is given when due to the change of variables a dual bound in a quadratic type optimization problem becomes worse.

1. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 394 p.
2. *Шор Н.З.* Роль избыточных ограничений в улучшении двойственных оценок для полиномиальных оптимизационных задач // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 106–121.
3. *Shor N.Z., Stetsyuk P.I.* Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems // J. of Global Optimization. – 2002. – 23. – P. 1–41.
4. *Шор Н.З., Березовский О.А.* Новые алгоритмы решения задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 2. – С. 100–106.
5. *Стецюк П.И.* О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа // Там же. – 2005. – № 6. – С. 168–172.
6. *Стецюк П.И.* Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа // Там же. – 2006. – № 1. – С. 63–75.
7. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
8. *Barahona F., Mahjoub A.R.* On the cut polytope // Math. Program. – 1986. – 36. – P. 157–173.
9. *Shor N.Z., Stetsyuk P.I.* Dual Solution of Quadratic-Type Problems by r-algorithm (subroutine DSQTPr) // Abstracts of the Second International Workshop "Recent Advances in Non-Differentiable Optimization" (October, 1-4, 2001, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2001. – P. 36.

Получено 28.03.2008