УДК 519.8

С.И. ДОЦЕНКО

О СИТУАЦИЯХ РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ ПООЧЕРЕДНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается задача поочередного преследования одним преследователем двух убегающих в предположении, что убегающие могут выбирать скорость убегания между нулем и заданой величиной u. Для разных соотношений скоростей преследователя и убегающих исследованы ситуации равновесия по Нэшу.

Введение. В данной работе рассматривается задача поочередного преследования одним преследователем (далее P) двух убегающих (E_1, E_2) при следующих предположениях.

1. В начальный момент времени P и оба убегающих находятся на одной прямой, причем P находится между убегающими.

2. Каждый из убегающих стремится максимизировать время собственной поимки и безразличен к времени поимки другого убегающего. P стремится минимизировать суммарное время поимки обоих убегающих.

3. Игроки придерживаются сложного рационального поведения, т. е. каждый игрок знает структуру игры, и что ее знают остальные, оптимизирует собственный критерий (п. 2) и полагает, что другие также оптимизируют свои критерии.

Рассмотрены такие случаи: 1) скорость P равна v, скорости E v_1, v_2 соответственно, причем $v > \max(v_1, v_2)$. Данный случай достаточно простой, не представляет интереса и носит вспомогательный характер при рассмотрении второго случая; 2) в начальный момент времени P находится посредине между убегающими. При этом перед началом преследования каждый из убегающих принимает решение – оставаться все время на месте (быть неподвижным) или убегать с заданой скоростью u, где $u < v$. В данном случае между убегающими возникает биматричная игра, причем структура точек равновесия по Нэшу различна при разных значениях u/v.

Первый случай. Скорость P равна v, скорости E_1, E_2 равны v_1, v_2 соответственно, причем $v > \max(v_1, v_2)$. Рассмотрим логику E. Пусть P вначале погонится за мной, тогда для максимизации времени жизни нужно убегать в направлении «от него». Пусть P вначале погонится за вторым E, который также будет убегать в направлении "от него". Чтобы в момент поимки другого E оказаться от P на максимальном расстоянии, нужно опять убегать в направлении «от P». Логика P такова: вначале нужно догнать одного из E, потом другого. Легко показать, что стратегии, когда P гонится за одним из E, затем не достигнув его и «передумав», за другим, не являются оптимальными для P. Таким образом, поиск оптимальной стратегии преследователем сводится к перебору двух вариантов – кого из двух убегающих E_1 или E_2, преследовать первым. При соблюдении всеми игроками рациональных стратегий, игра не выходит за пределы прямой. Пусть P вначале гонится за E_1, затем за E_2. Тогда время поимки E_1 равно $T_1^1 = \dfrac{s_1}{v - v_1}$. При этом в момент поимки E_1 расстояние между P и E_2 будет равно $r_1 = vT_1^1 + s_2 + v_2 T_1^1 = \dfrac{(v+v_2)s_1 + (v-v_1)s_2}{v - v_1}$, для поимки E_2 понадобится еще время $T_1^2 = \dfrac{r_1}{v - v_2} = \dfrac{(v+v_2)s_1 + (v-v_1)s_2}{(v-v_1)(v-v_2)}$. Таким образом суммарное время поимки составляет:

$$T_1 = T_1^1 + T_1^2 = \frac{2vs_1 + (v-v_1)s_2}{(v-v_1)(v-v_2)}. \tag{1}$$

В силу симметрии задачи, суммарное время поимки в случае, когда вначале преследуют E_2, получаем из данной формулы заменой $s_1 \leftrightarrow s_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$, и таким образом

$$T_2 = \frac{2vs_2 + (v-v_2)s_1}{(v-v_1)(v-v_2)}. \tag{2}$$

Неравенство $T_1 \vee T_2$ равносильно неравенству $(v+v_2)s_1 \vee (v+v_1)s_2$.

Пусть $v_1 = v_2$, тогда $T_1 \vee T_2$ равносильно $s_1 \vee s_2$ и P вначале будет преследовать ближайшего из E.

Пусть $s_1 = s_2$, тогда $T_1 \vee T_2$ равносильно $v_2 \vee v_1$ и P вначале будет преследовать E с большей скоростью.

Второй случай. Пусть в начальный момент времени P находится посредине между убегающими. При этом перед началом преследования каждый из убегающих принимает решение – оставаться все время на месте (быть неподвижным) или убегать с заданой скоростью u, где $u < v$. Если оба E придерживаются одинаковой стратегии (стоять-стоять или бежать-бежать), то P случайным образом с вероятностью ½ выбирает первую жертву. Если один из E стоит, а другой убегает, то P выгоднее преследовать убегающего (поскольку предполагается рациональное поведение всех игроков, то считается, что так и будет). Таким образом, у E_1 и у E_2 возникает дилемма. С одной стороны, очевидно, убегать лучше, чем стоять, с другой стороны, лучше быть второй жертвой, чем первой (а выбор стратегии “стоять” способствует этому).

Данная ситуация описывается биматричной игрой в нормальной форме. Пусть E_1 выбирает строки, E_2 – столбцы, 1 соответствует выбору “стоять”, 2 – “убегать”, A, B – матрицы времени жизни E_1, E_2 соответственно.Тогда

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{2s}{v} & \dfrac{s(3v-u)}{v(v-u)} \\ \dfrac{s}{v-u} & \dfrac{s(2v-u)}{(v-u)^2} \end{pmatrix},\ B=A^T=\begin{pmatrix} \dfrac{2s}{v} & \dfrac{s}{v-u} \\ \dfrac{s(3v-u)}{v(v-u)} & \dfrac{s(2v-u)}{(v-u)^2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Данная игра разрешима по доминированию при $\left(a_{11}\ge a_{21}, a_{12}\ge a_{22}\right)\vee\left(a_{11}\le a_{21}, a_{12}\le a_{22}\right)$, иначе игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Неравенство $a_{11}\ge a_{21}$ сводится к $u\le\dfrac{v}{2}$, а $a_{21}\ge a_{22}$ – к $u^2-3uv+v^2\ge 0$, откуда $u\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}v\approx 0{,}382v$.

Таким образом, если $u\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}v$, то игра разрешима в чистых стратегиях, и решением игры является “стоять-стоять”.

Если $u\ge\dfrac{v}{2}$, то игра имеет решение по доминированию “бежать-бежать”.

Если $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}v<u<\dfrac{v}{2}$, то тогда $a_{11}>a_{21}$, $a_{12}<a_{22}$, $b_{11}<b_{12}$, $b_{21}>b_{22}$ и игра имеет две точки равновесия в чистых стратегиях “стоять-стоять” и “бежать-бежать”. При этом точка “бежать-бежать” доминирует по Паретто точку “стоять-стоять”. Кроме того, в данной ситуации существует равновесие в чисто смешанных стратегиях, где вероятности выбора стратегий игроками находятся по формулам

$$x_1^* = \frac{J_y B^{-1}}{J_y B^{-1} J_x}, \quad x_2^* = \frac{A^{-1} J_x}{J_y A^{-1} J_x} \tag{4}$$

а выигрыши игроков составляют

$$\tau_1 = \frac{1}{J_y A^{-1} J_x}, \ \tau_2 = \frac{1}{J_y B^{-1} J_x}, \tag{5}$$

где $J_x = (1,...,1)^T, \ J_y = (1,...,1).$

Для биматричной игры 2×2 данные формулы приобретают упрощенный вид

$$x_1^* = \left(\frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}; \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} \right),$$

$$x_2^* = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \right),$$

$$\tau_1 = \frac{\det(A)}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{22}}, \tau_2 = \frac{\det(B)}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{22}}. \tag{6}$$

Обоснование данных формул, а также детальный анализ биматричной игры 2×2 см, например, в [1, с. 66] или [2, с. 217]. Отметим здесь лишь то, что данные формулы применимы лишь для случая, когда биматричная игра неразрешима по доминированию, иначе решение не будет иметь физического смысла (вычисленные вероятности стратегий будут меньше 0 или больше 1). Обратим внимание на то, что формально стратегии зависят только от “чужой”, а выигрыш от применения этих стратегий – от “своей” матрицы времени жизни.

В данном случае

$$a_{22} - a_{12} = \frac{s}{v(v-u)^2}\left[-v^2 + 3uv - u^2\right],$$

$$a_{11} - a_{21} = s\frac{v-2u}{v(v-u)} = \frac{s}{v(v-u)^2}\left[v^2 - 3uv + 2u^2\right],$$

$$a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12} = \frac{su^2}{v(v-u)^2},$$

$$x_1^* = \left(\frac{-v^2 + 3uv - u^2}{u^2}; \frac{v^2 - 3uv + 2u^2}{u^2} \right), \quad \tau_1 = \frac{s(v-u)}{u^2}. \tag{7}$$

Поскольку игра симметричная, то $x_2^* = x_1^*, \ \tau_2 = \tau_1$.

Данная точка равновесия как бы искуственная, т. е. она существует и удовлетворяет всем уловиям точки равновесия, но вряд ли игроки будут придерживаться таких смешаных стратегий.

Рассмотрим такую несимметричную игру. Пусть теперь P имеет “антипатию” к E_1, т. е. в симметричных ситуациях “стоять-стоять” и “бежать-бежать” P вначале будет преследовать E_1. Если же E_1 стоит, а E_2 убегает, то P будет вначале преследовать E_2 (предполагается, что собственные интересы выше “антипатии”). Данная ситуация описывается биматричной игрой

$$A=\begin{pmatrix} \frac{s}{v} & \frac{s(3v-u)}{v(v-u)} \\ \frac{s}{v-u} & \frac{s}{v-u} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{3s}{v} & \frac{s}{v-u} \\ \frac{s(3v-u)}{v(v-u)} & \frac{s(3v-u)}{(v-u)^2} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Заметим, что при всех допустимых значениях u справедливы неравенства $a_{11} < a_{21}$, $a_{12} > a_{22}$, $b_{21} < b_{22}$ и таким образом поведение точек равновесия зависит лишь от соотношения b_{11} и b_{12}.

Если $u > \frac{2}{3}v$, то $b_{12} > b_{11}$ и игра разрешима по доминированию “стоять-бежать”.

Если $u < \frac{2}{3}v$, то $b_{11} > b_{12}$ и игра не имеет точек равновесия в чистых стратегиях, а единственное равновесие в смешаных стратегиях, которое находится по формулам (6).

$$b_{22}-b_{21}=\frac{s(3uv-u^2)}{(v-u)^2 v},\ b_{11}-b_{12}=\frac{s(3u^2-5uv+2v^2)}{(v-u)^2 v},$$

$$b_{11}+b_{22}-b_{21}-b_{12}=\frac{2s\left(u^2-uv+v^2\right)}{(v-u)^2 v};$$

$$a_{22}-a_{12}=\frac{s(-2v+u)}{(v-u)v},\ a_{11}-a_{21}=-\frac{su}{(v-u)v},$$

$$a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}=-\frac{2sv}{(v-u)v} \qquad (9)$$

отсюда

$$x_1^*=\left(\frac{3uv-u^2}{2(u^2-uv+v^2)};\frac{3u^2-5uv+2v^2}{2(u^2-uv+v^2)}\right),\ x_2^*=\left(\frac{2v-u}{2v};\frac{u}{2v}\right). \qquad (10)$$

Данная точка равновесия в чисто смешаных стратегиях также искусственна хотя бы потому, что для достижения выигрыша $\tau_1 = \frac{s}{v-u}$ для E_1 нет необходимости вычислять и придерживаться x_1^*, достаточно просто придерживаться стратегии "бежать".

С.І. Доценко

ПРО СИТУАЦІЇ РІВНОВАГИ У ЗАДАЧІ ПОЧЕРГОВОГО ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Розглядається задача почергового переслідування одним переслідувачем двох утікачів за припущення, що втікачі можуть вибирати швидкість утікання між нулем та заданою величиною *u*. Для різних співвідношень швидкостей переслідувача та втікачів досліджено ситуації рівноваги за Нешем.

S.I. Dotsenko

ON NASH EQUILIBRIUM IS SUCCESSIVE PURSUIT PROBLEM

The problem of successive pursuit with one pursuer and two escapers is considered. It is assumed< that each escaper can choose his speed between zero and given value u. For different relations between pursuer and escaper Nash equilibrium situations are considered.

1. *Доценко С.І.* Теорія ігор. Навч. посібник, 2008. – 84 с. Розміщений на сайті факультету кібернетики КНУ, www.unicyb.kiev.ua
2. *Мащенко С.О.*, *Волошин О.Ф.* Теорія прийняття рішень. Навч. посібник. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2006 . – 303 с.

Получено 23.03.2009