Теорія оптимальних рішень

УДК 591.1

Д.А. ПЕТРЕНЮК

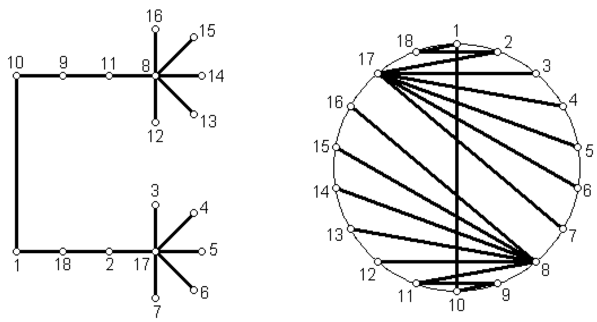
ДОВЕДЕННЯ ІСНУВАННЯ ПІВОБЕРТОВИХ Т-ФАКТОРИЗАЦІЙ ПОВНОГО ГРАФА ПОРЯДКУ N=20

При доведенні існування півобертових Т-факторизацій графа K_n для будь-якого півсиметричного дерева порядку n=20 використовується поняття правильної нумерації дерева порядку n=10, тобто такої нумерації його вершин, за якої довжини всіх ребер (що обчислюються як абсолютні різниці номерів кінців ребра) є різними і складають послідовність натуральних чисел 1, 2,…, n–1.

Півобертова деревна факторизація повного графа [1] полягає у тому, що граф порядку $2n$ розкладається на n ізоморфних компонент, кожна з яких є півсиметричним деревом порядку $2n$. Півсиметричне дерево містить центральне ребро, що з'єднує два ізоморфних дерева порядку n (симетричні половини) (рис. 1, а). Для отримання такого розкладу слід виконати вписування дерева, якому мають бути ізоморфні всі компоненти розкладу, в коло. Таке коло містить $2n$ точок, що мають номери 1,..., $2n$ та розбивають його на $2n$–1 дуг. Вписування необхідно виконати таким чином, щоб існувало рівно по два ребра однакової довжини (довжини ребер вираховуються як різниці номерів вершин-кінців даного ребра), і при цьому кожні такі два ребра були симетричні одне одному відносно центра кола. Таке вписування називають *правильним* (рис. 1, б).

Правильне вписування півсиметричного дерева в коло зводиться до вписування його симетричної половини (тобто дерева порядку n) в півколо, такого, що довжини всіх ребер вписаного в півколо дерева є різними та утворюють послідовність натуральних чисел 1,…, n–1 (рис. 2).

Таким чином, задача знаходження півобертової факторизації повного графа порядку $2n$ з компонентами, ізоморфними даному півсиметричному дереву порядку $2n$, зводиться до відшукання такої нумерації вершин симетричної половини даного півсиметричного дерева, при котрій жодні два ребра не мають однакової довжини (тобто різниці номерів кінців ребра є різними для всіх ребер), та довжини ребер є натуральними числами 1, 2,..., n–1. Таку нумерацію називатимемо *правильною*. Проблема правильної нумерації відома як проблема А. Роса [2] (він називав таку нумерацію „граціозною”).



а б

РИС. 1. Півсиметричне дерево порядку 18 та його правильне вписування в коло

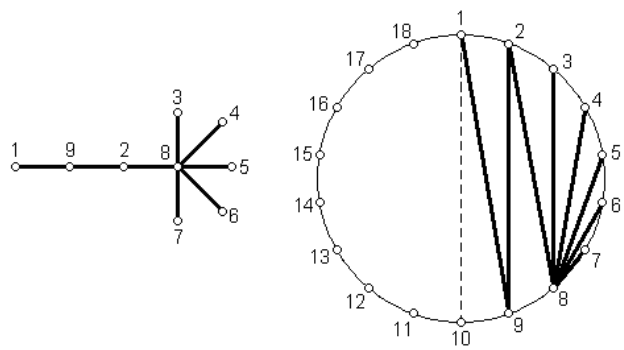


РИС. 2. Вписування дерева порядку 9 (симетричної половини) в півколо

Відомо, що правильну нумерацію допускають всі ланцюги, зірки, а також гусениці – дерева, що після видалення всіх вершин порядку 1 перетворюються на ланцюги (рис. 3).

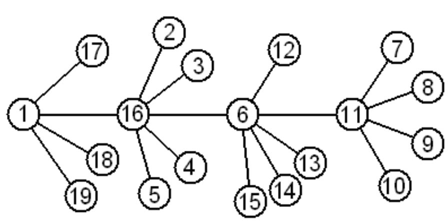


РИС. 3. Правильна нумерація гусениці

На основі цих даних легко доводиться

Теорема. Якщо до вершини з номером 1 правильно занумерованого дерева приєднати гусеницю, то отримане дерево допускає правильну нумерацію. Усе це дозволило довести, що правильну нумерацію допускають усі дерева порядку $k=9$, а отже, півобертову факторизацію допускають усі дерева порядку $n=18$.

Також було показано [3], що можлива така правильна нумерація ланцюга, за якої номер 1 отримує друга або третя від кінця ланцюга вершина. Це доводить існування правильної нумерації для дерев, які отримуються шляхом приєднання гусениці до ланцюга у другій або третій вершині від краю ланцюга.

Визначення. Кометою називатимемо дерево, отримане шляхом приєднання ребра до кожної висячої вершини зірки довільного порядку, тобто подвоєнням променів зірки (рис. 4).

Комета допускає правильну нумерацію. Алгоритм отримання такої нумерації полягає в наступному. Спочатку центральній вершині комети присвоюють номер 1. Першій висячій вершині присвоюють номер 2, а вершині, що лежить на другому промені комети ближче до центра (вона має степінь 2) присвоюють номер 3. Далі нумерація продовжується „хвилями", тобто обираються по черзі нижні (висячі) та середні вершини, аж поки не буде занумеровано вершину на останньому промені комети. Після цього рухаємося аналогічним чином в зворотному напрямку, нумеруючи по порядку вершини, що ще не мають номера. На рис. 4 наведено приклад правильної нумерації комети.

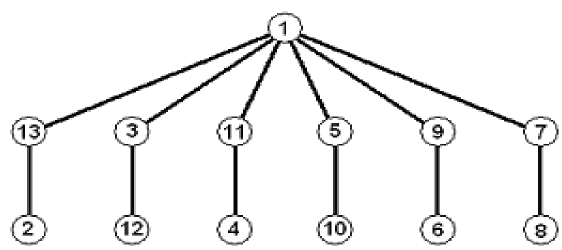
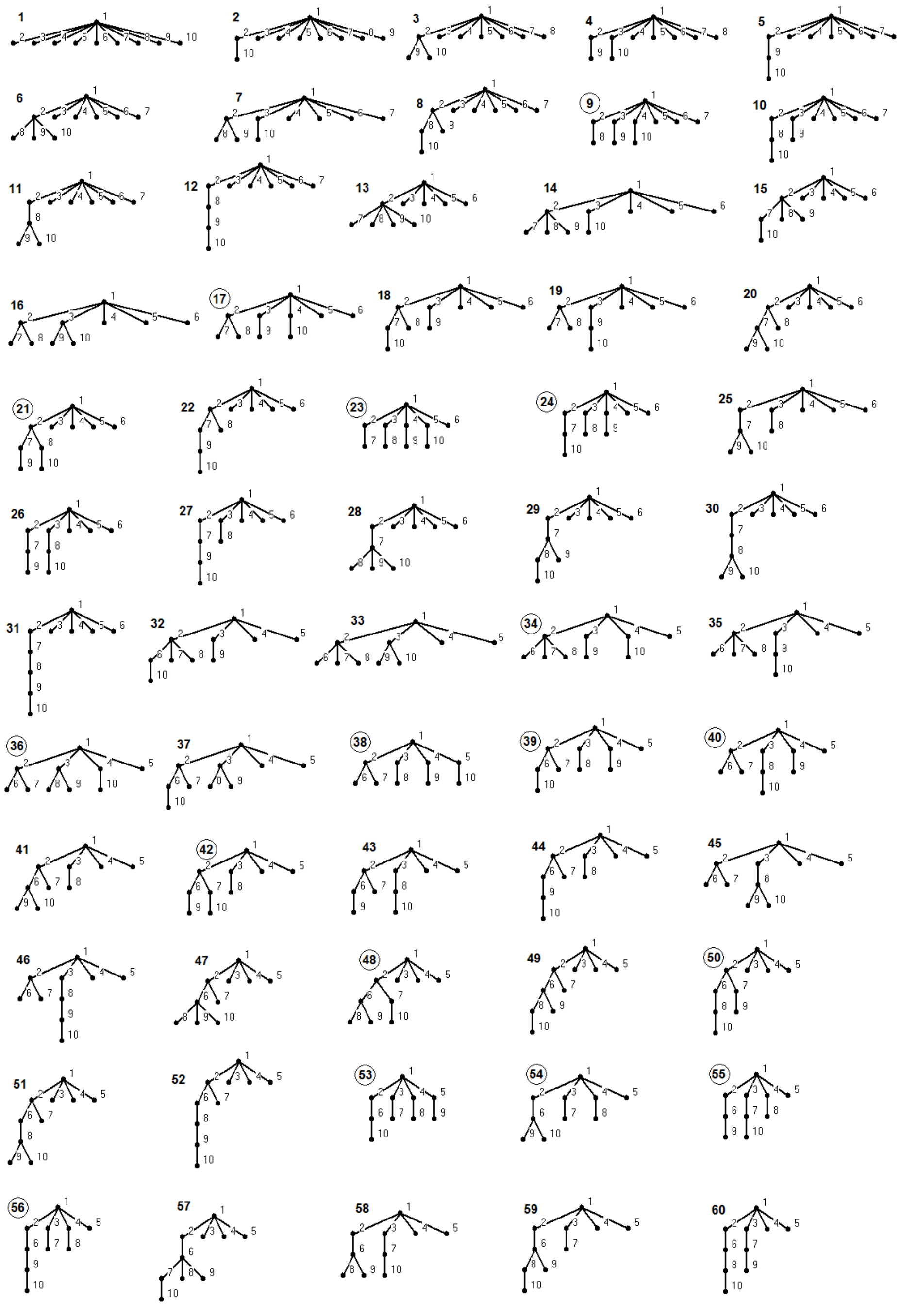


РИС. 4. Правильна нумерація комети

У даній роботі доводиться існування півобертових факторизацій для всіх дерев порядку $n=20$. Перелік усіх неізоморфних дерев порядку $k=10$ було отримано за допомогою комп'ютера шляхом перебору. Цей перелік показано на рис. 5.

Більшість дерев – гусениці, для яких доведено існування правильної нумерації. Номери дерев, що не є гусеницями, на рисунку обведено колом. Розглянемо ці дерева. Спочатку вкажемо на дерева, що отримуються приєднанням гусениці до ланцюга або комети.



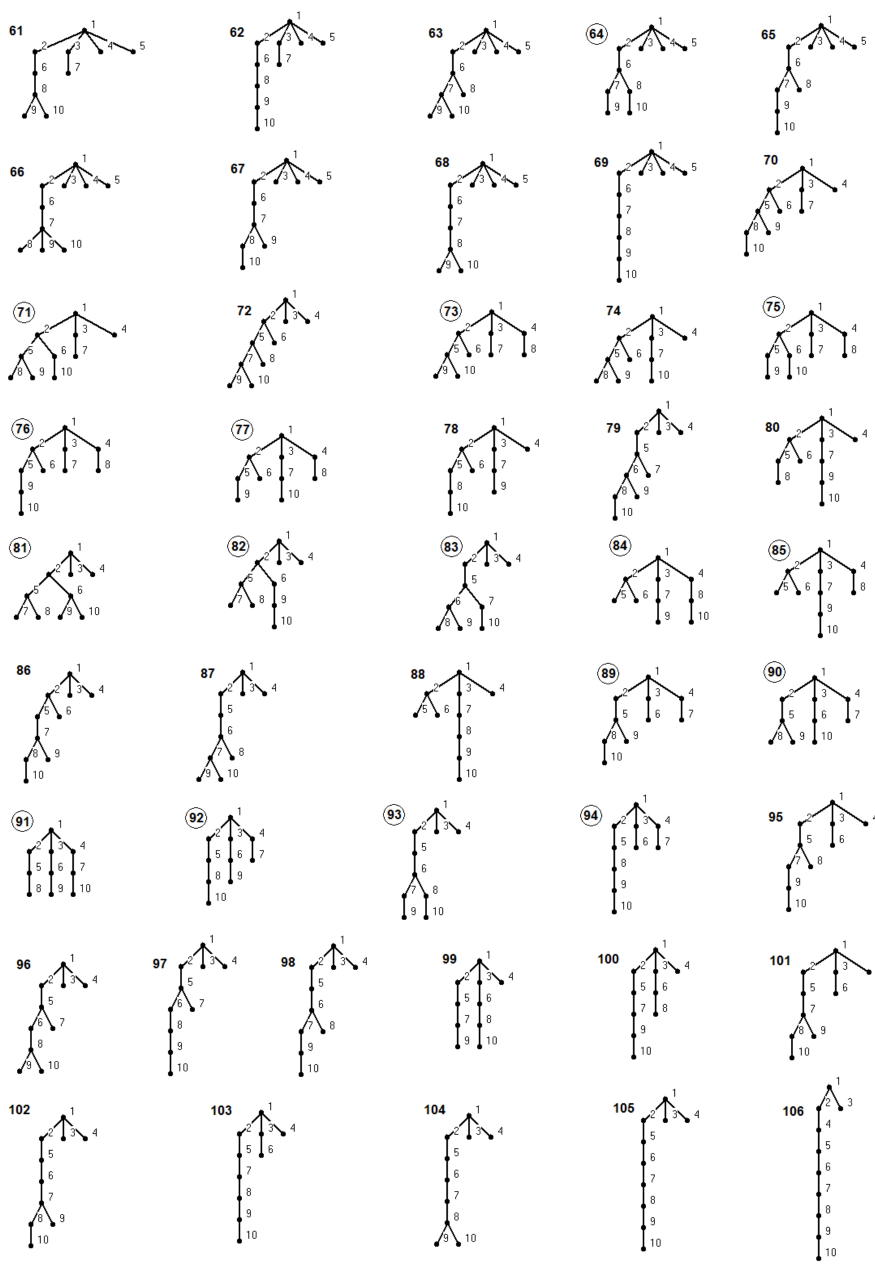


РИС. 5. Перелік дерев порядку 10

Дерева 9, 17, 21, 24, 34, 39, 42, 54, 56, 64, 73, 76, 89, 93, 94 можна отримати приєднанням гусениці до комети, показаної на рис. 6, а (приєднання гусениці відбувається до центральної вершини комети, що на рисунку має номер 1). На ньому показано також правильну нумерацію цього дерева.

Дерева 23, 38, 53 представляють собою комбінацію гусениці та комети, зображеної та правильно занумерованої на рис. 6, б.

Дерева 40, 50, 55, 77, 85, 92, 90 представляють собою комбінацію гусениці та ланцюга, показаного на рис. 6, в. На рисунку вказано також правильну нумерацію ланцюга, при якій номер 1 отримує вершина, до якої приєднується гусениця.

За теоремою всі перелічені дерева допускають правильну нумерацію.

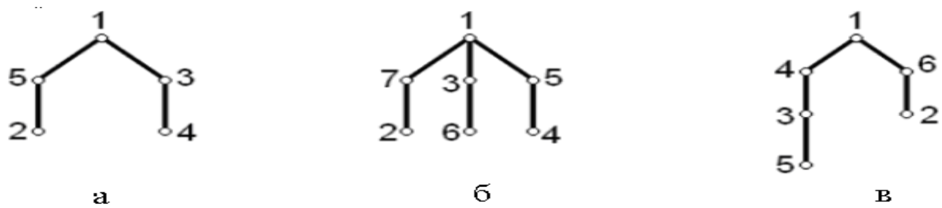


РИС. 6. Комети та ланцюг, що є компонентами дерев 9, 17, 21, 24, 34, 39, 42, 54, 56, 64, 73, 76, 89, 93, 94 (а); 23, 38, 53 (б); 40, 50, 55, 77, 85, 92, 90 (в)

Усі інші дерева можна представити як поєднання гусениці з деревом (компонентою), що не належить до вищерозглянутих типів. Такі компоненти та їх правильну нумерацію показано на рис. 7.

За теоремою всі перелічені дерева допускають правильну нумерацію.

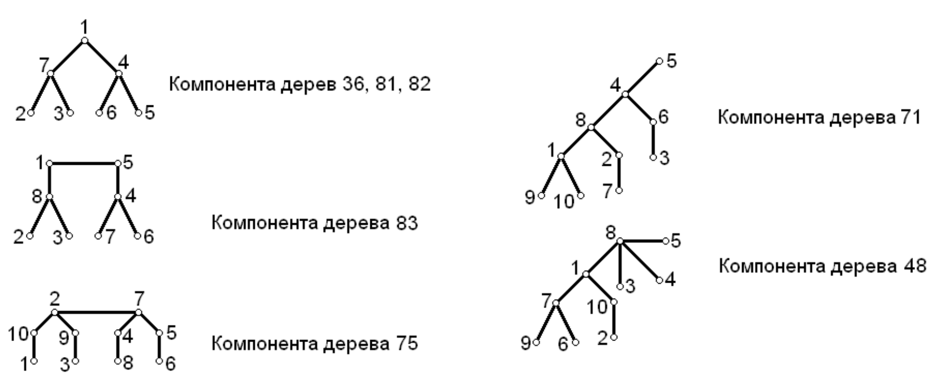


РИС. 7. Компоненти дерев 36, 48, 71, 75, 81, 82, 83

Таким чином, доведено існування правильної нумерації для всіх дерев порядку 10. А це, в свою чергу, доводить існування півобертових факторизацій для всіх півсиметричних дерев порядку 20.

Ця методика, за допомогою комп'ютера, може бути використана для доведення існування *T*-факторизацій вищих порядків. При цьому можна програмно вилучати з розгляду ланцюги, гусениці, комети та їх комбінації, що відповідають теоремі.

Користуючись нагодою, хочу висловити подяку Д. Дурачу за надану ним програму генерації дерев.

Д.А. Петренюк

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУОБОРОТНЫХ *T*-ФАКТОРИЗАЦИЙ ПОЛНОГО ГРАФА ПОРЯДКА N=20

При доказательстве существования полуоборотных *T*-факторизаций графа K_n для любого полусимметричного дерева порядка n = 20 используется понятие правильной нумерации дерева порядка n = 10, т. е. такой нумерации его вершин, при которой длины всех ребер (вычисляемые как абсолютные разности номеров концов ребра) различны и составляют последовательность натуральных чисел 1, 2, ... , n–1.

D.A. Petreniuk

PROVING OF EXISTENCE OF 20-ORDER HALF-ROTATIONAL FACTORISATIONS OF COMPLETE GRAPH

To prove the existence of half-rotational T-factorisations of complete graph K_n for every half-symmetrical tree of oder n = 20, a notion of 10-order tree proper enumeration is used. Proper tree enumeration is a tree vertexes enumeration where all the edges lengths (which are calculated as absolute values of the edge ends differences) have different values and are the set of natural numbers 1, 2, ... , n–1.

1. *Петренюк А.Я.* Півобертові деревні факторизації повних графів // Український математичний журнал. – 2001. – **53**, № 5. – С. 710–716.
2. *Rosa A.* On certain valuations of the vertices of a graph // Theory of Graphs, ed. P. Rosenstehl, Gordon and Breach, New York. – 1967. – P. 349–355.
3. *Донец Г.А.* Об одной задаче нумерации вершин деревьев // Математичекие машины и системы. – 2010. – № 1. – С. 17–24.

Получено 12.05.2010