УДК 519.85

Б.В. НОРКИН

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ РИСКА БАНКРОТСТВА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ[1]

Изучается проблема вычисления вероятности разорения страховой компании на конечном интервале времени. С одной стороны, эта вероятность может быть оценена методом статистических испытаний (МСИ). С другой стороны, вероятность разорения как функция начального капитала и временного интервала удовлетворяет линейному интегральному уравнению (с граничным условием на бесконечности), которое решается методом последовательных приближений (МПП). В работе проводится сравнение эффективности параллельных версий МСИ и МПП, реализованных на кластере из нескольких персональных компьютеров, каждый из которых имеет по два или четыре вычислительных ядра (всего до двадцати ядер).

Введение. Оценка вероятности разорения страховой компании является важной практической задачей, но оказывается сложной теоретической и вычислительной проблемой. Хотя вероятность разорения в принципе может быть оценена МСИ (моделированием траекторий стохастической эволюции резервов компании), но для оценки малых вероятностей требуется астрономическое число испытаний. Поэтому в актуарной математике огромное внимание уделяется аналитическим и численным методам оценки вероятности разорения. Известно, что вероятность разорения удовлетворяет некоторым интегральным уравнениям [1–8]. Одним из общих подходов к их решению является МПП [9–15]. На каждом шаге МПП приходится вычислять одно или двумерные интегралы по большой области, это трудоемкая вычислительная процедура. Интегрирование на каждой итерации можно проводить как по квадратурным формулам, так и методом Монте-Карло. Поэтому естественно реализовывать методы МСИ и МПП на параллельных вычислительных системах (многоядерных вычислительных машинах и кластерах). МСИ допускает естественное распараллеливание: отдельные испытания можно проводить независимо на разных процессорах. МПП – функциональный метод простой итерации, поэтому тоже допускает распараллеливание.

[1] Работа поддержана грантом Президента Украины для молодых ученых

В настоящей работе проводится сравнение эффективности параллельных версий методов МСИ и МПП, реализованных на кластере из нескольких (до десяти) персональных компьютеров, каждый из которых имеет по два или четыре вычислительных ядра.

В отличие от большинства теоретических работ по вероятности разорения в настоящей работе проблема риска разорения рассматривается на конечном временном интервале. Это позволяет изучать проблему разорения при любом соотношении потоков требований и премий, в то время как для бесконечного интервала времени задача имеет нетривиальное решение, только если средние за единицу времени требования меньше премий. С другой стороны, это приводит к необходимости рассматривать вероятность разорения как функцию не только от начального капитала, но и от величины временного интервала. Однако, по прежнему, функция вероятности неразорения удовлетворяет определенным двумерным интегральным уравнениям (см., например, [10], формула (6)), и для ее вычисления применим общий метод последовательных приближений, детально изученный в [9 – 15]. В рассматриваемом случае конечного временного интервала дополнительная вычислительная сложность состоит в том, что на каждой итерации приходится вычислять много (по числу узлов сетки) двумерных интегралов. В этом отношении МСИ значительно проще МПП, однако последний дает практически недостижимую для первого точность оценки вероятности разорения.

Постановка задачи. Вероятность $\varphi(u,t)$ неразорения страховой компании на временном интервале $\left[0,t\right]$ с начальным резервом u удовлетворяет интегральному уравнению [10]

$$\varphi(u,t)=\int_0^t\int_0^{U(u,\tau)}\varphi\big(U(u,\tau)-z,t-\tau\big)\,dF(z,\tau)+\big(1-F(\infty,t)\big), \qquad (1)$$

и граничным условиям $\varphi(u,0)=1$, $\varphi(+\infty,t)=1$, где $F(z,\tau)$ – совместная функция распределения моментов прихода τ и величин страховых требований z для независимых между собой страховых случаев, $F(z,0)=0$; функция $U(u,\tau)$ – решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dt}=C(U), \quad U(0)=u, \qquad (2)$$

$C(\cdot)$ – некоторая неотрицательная функция, выражающая интенсивность пополнения резервов страховой компании в зависимости от их текущего наполнения U, $0\le C(U)\le c$. Здесь c – агрегированная страховая премия, функция $C(\cdot)$ имеет смысл управления страховыми резервами. Например,

$$C(U)=\begin{cases}0, & U\ge D(U),\\ c, & U<D(U),\end{cases} \qquad (3)$$

где $D(\cdot)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, называемая дивидендным барьером [1]. Если $F(z,\tau)$ имеет плотность $\rho(z,\tau)$, то в (1) $dF(z,\tau)$ заменяется на $\rho(z,\tau)d\tau dz$.

Метод последовательных приближений. В общей форме уравнение (1) (и другие подобные уравнения) может быть записано в виде

$$\varphi(u,t) = A_{u,t}\varphi(\cdot,\cdot), \tag{4}$$

где $A_{u,t}$ – соответствующий интегральный оператор. Нетрудно видеть, что оператор $A_{u,t}$ в (1), (2) – сжимающий в следующем смысле:

$$\left|\varphi_1(u,t)-\varphi_2(u,t)\right| \le \left(1-F(\infty,T)\right) \sup_{\substack{0\le x<\infty,\\ 0\le t'\le T}} \left|\varphi_1(x,t')-\varphi_2(x,t')\right|$$

для любых ограниченных монотонных (возрастающих по u и убывающих по t) функций $\varphi_1(u,t)$, $\varphi_2(u,t)$, $u\in[0,\infty)$, $t\in[0,T]$.

МПП для решения уравнения (4) имеет вид

$$\varphi^{k+1}(u,t) = A_{u,t}\varphi^k(\cdot,\cdot), \quad 0\le\varphi^0(u,t)\le 1,\ k=0,1,\dots,$$

где $\varphi^0(u,t)$ – некоторая начальная функция, нестрого возрастающая по u и убывающая по t. Данный метод детально изучен в [11, 12]. Если $\varphi^0(u,t)\equiv 1$, то последовательность приближений $\left\{\varphi^k(u,t)\right\}$ монотонно убывает и сходится к решению уравнения сверху, а если $\varphi^0(u,t)\equiv 0$, то $\left\{\varphi^k(u,t)\right\}$ монотонно возрастает и сходится к решению снизу. Норма разности между приближениями сверху и снизу дает оценку точности приближенных решений.

На практике вычисления проводятся в некоторой области $\left\{0\le u\le u_\infty, 0\le t\le t_{\max}\right\}$ такой, что $\varphi(u,t)=1$ при $u\ge u_\infty$. Если задать функции $\varphi^k(\cdot,\cdot)$ и $\varphi^{k+1}(\cdot,\cdot)$ значениями в узлах (u_i,t_j) двумерной сетки, а в остальных точках находить их значения путем интерполяции, то значение $\varphi^{k+1}(u_i,t_j)$ в узле (u_i,t_j) находится по функции $\varphi^k(\cdot,\cdot)$ независимо от вычислений для других узлов $(u_{i'},t_{j'})$ путем вычисления двумерных интегралов

$$\varphi^{k+1}(u_i,t_j) = \int_0^{t_j}\int_0^{U(u_i,\tau)} \varphi^k\left(U(u_i,\tau)-z, t_j-\tau\right)dF(z,\tau) + \left(1-F\left(\infty,t_j\right)\right). \tag{5}$$

Таким образом, вычисления в МПП можно распараллелить по (u_i,t_j), т. е. на каждой итерации k для различных пар (u_i,t_j) вычисления можно проводить независимо и параллельно, а по завершении итерации все величины $\varphi^{k+1}(u_i,t_j)$ собираются в один массив, который затем передается всем вычислительным ядрам для выполнения новой итерации. Для контроля точности решения вычисления проводятся, начиная с $\varphi^0 \equiv 1$ и $\varphi^0 \equiv 0$.

Численные эксперименты. Расчеты проводились на мини-кластере DISOPT Института кибернетики, оснащенном процессорами Intel Core2Quad Q9550 для страховой модели с параметрами

$$U(u,t) = u + ct, \quad F(z,\tau) = \left(1 - e^{-z/\mu}\right)\left(1 - e^{-\alpha\tau}\right), \quad \alpha = 0.2, \quad \mu = 10, \quad c = 1,$$

$t_{\max} = 50$, $u_\infty = 200$.

Заметим, что $\alpha\mu/c = 2 > 1$, поэтому страховая компания с такими параметрами разоряется с вероятностью единица на бесконечном интервале времени при любом начальном капитале. На рис. 1 показан график, а в табл. 1 – значения приближения $\varphi^{31}(u,t)$. Результаты решения уравнения (1) методом (5) на одном, четырех и восьми вычислительных ядрах кластера DISOPT приведены в табл. 2, а результаты решения той же задачи методом статистических испытаний на мини-кластере НАУКМА-214, оснащенном процессорами Intel E1400 Core2Duo (всего 20 ядер) – в табл. 3.

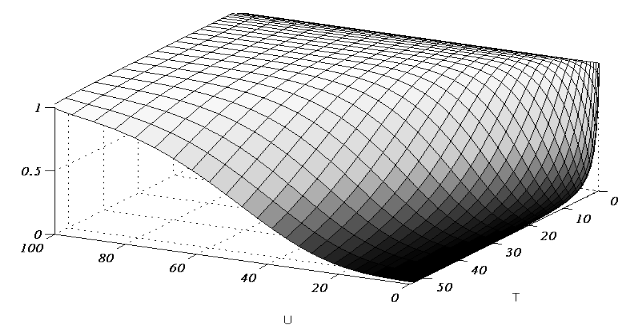

РИС. 1. График функции $\varphi^{31}(u,t)$

ТАБЛИЦА 1. Значения функции $\varphi^{31}(u,t)$

t\u	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,26759	0,706627	0,899259	0,968347	0,99083	0,997472	0,999335	0,999832	0,99996	0,99999	0,999997
20	0,130629	0,488484	0,74704	0,888953	0,955795	0,98361	0,994288	0,998107	0,999414	0,999816	0,999947
30	0,076697	0,3438	0,600573	0,784424	0,894728	0,952485	0,979963	0,992015	0,997025	0,998898	0,999637
40	0,048861	0,245944	0,475451	0,673914	0,816032	0,904274	0,953581	0,978807	0,990947	0,996209	0,998639
50	0,033034	0,179616	0,374796	0,568926	0,72831	0,841653	0,913895	0,955927	0,978839	0,990123	0,996095

ТАБЛИЦА 2. Исследование эффективности распараллеливания МПП

Число ядер	1	4	4	7	8
Число итераций	31	31	42	31	31
Точность	3.0611×10^{-8}	3.0611×10^{-8}	4.4409×10^{-16}	3.0611×10^{-8}	3.0611×10^{-8}
Время, сек	1704.60	668.10	864.48	407.94	386.02

Метод статистических испытаний состоит в моделировании N траекторий стохастической эволюции резервов страховой компании на заданном интервале времени $[0, t_{\max}]$ для каждого значения начального капитала компании $u \le u_\infty$ и вычислении доли $p_N(u,t)$ неразорившихся траекторий к моменту времени $t \le t_{\max}$ [2]. Для каждого u распараллеливание состоит в равномерном распределении между вычислительными ядрами N симуляций траекторий процесса. В процессе параллельного моделирования ядра не общаются, а по завершении моделирования массив траекторий собирается на одном ядре и строится функция $p_N(u,t)$. Точность метода Монте-Карло может быть оценена с помощью неравенства Хефдинга $\Pr\{|p_N(u,t)-\varphi(u,t)|\ge\delta\}\le 2e^{-N\delta^2/2}$, откуда ($10^{-k}$) – доверительная граница для $|p_N(u,t)-\varphi(u,t)|$ имеет вид $\delta_k(N) = = \sqrt{2(k\ln 10+\ln 2)}\Big/\sqrt{N}$. Значения 0.01-доверительной границы $\delta_2(N)$ приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3. Исследование точности МСИ (метода Монте-Карло)

Число испытаний N	N=1000	N=10000	N=100000
Достигнутая точность	0.04	0.015	0.005
Теоретическая точность $\delta_2(N)$	0.1029	0.0326	0.0103
Время, сек	20.19	123.55	1195.9

Выводы. В работе доказана возможность распараллеливания МПП и МСИ (метода Монте-Карло) для оценки риска (вероятности) разорения страховой компании. Численные эксперименты проводились на мини-кластерах, состоящих из нескольких (до десяти) персональных компьютеров с двумя или четырьмя ядрами каждый. Для МПП время решения задачи (решения двумерного интегрального уравнения для вероятности неразорения как функции начального капитала и временного интервала) на восьми ядрах примерно в пять раз меньше, чем на одном ядре. Для МСИ время решения задачи примерно обратно пропорционально числу ядер. МПП позволяет решать задачу с любой контролируемой точностью, например, время решения задачи с точностью 10^{-7} на кластере из двух машин с процессорами Intel Core2Quad Q9550 (всего восемь ядер) составляло порядка 6 минут. Подобная точность практически недостижима для МСИ, например, при числе испытаний 100000 на кластере из десяти машин с процессорами Intel E1400 Core2Duo (всего 20 ядер) была достигнута точность только 5×10^{-3} за время порядка 20 минут.

Б.В. Норкін

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ РИЗИКУ БАНКРУТСТВА
СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Досліджується проблема обчислення ймовірності банкрутства страхової компанії на скінченному інтервалі часу. З одного боку, ця ймовірність може бути оцінена методом статистичних випробувань. З іншого – ймовірність банкрутства як функція початкового капіталу та часового інтервалу задовольняє лінійне інтегральне рівняння (з граничними умовами), яке розв'язується за допомогою методу послідовних наближень. У роботі порівнюються ефективності паралельних версій обох методів, реалізовані на кластері з декількох персональних комп'ютерів, кожен з яких має по два або чотири обчислювальні ядра (всього до двадцяти ядер).

B.V. Norkin

PARALELLIZATION OF METHODS FOR THE ASSESMENT OF THE RISK
OF BANKRAPTCY OF AN INSURANCE COMPANY

Problem of an insurance company ruin probability calculation on a finite time interval is considered. On one hand, this probability can be estimated by Monte Carlo simulation method. On the other hand the ruin probability as a function of initial capital and time interval satisfy some linear integral equation (with boundary conditions), that can be solved by a successive approximation method. In the paper parallel versions of both methods implemented on a cluster of several personal computers having two or four cores (up to twenty cores in total) are compared.

1. *Gerber H.U.* An introduction to mathematical risk theory. – Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, 1979. – 164 p.
2. *Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E.* Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd edition. – London, New York: Chapman and Hall, 1984. – 408 p.
3. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
4. *Assmussen S.* Ruin probabilities. – Singapur: World Scientific, 2000. – 385 p.

5. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с.
6. *Albrecher H., Kainhofer R.* Risk theory with a non-linear dividend barrier // Computing. – 2002. – **68**. – N 4. – P. 289–311.
7. *Albrecher H., Kainhofer R., Tichy R.F.* Simulation methods in ruin models with non-linear dividend barriers // Mathematics and Computers in Simulation. – 2003. – **62**. – P. 277–287.
8. *Норкин Б.В.* Система интегро-диференциальних уравнений для вероятности банкротства процесса риска в Марковской среде // Теорія оптимальних рішень. – 2002 – № 1. – С. 21–29.
9. *Норкин Б.В.* О методе последовательных приближений для вычисления вероятности банкротства классического процесса риска // Теорія оптимальних рішень. – 2003. – № 2. – С. 10 –18.
10. *Норкин Б.В.* Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска // Кибернетика и системний анализ. – 2004. – № 4. – С. 61–73.
11. *Норкин Б.В.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 157–164.
12. *Норкин Б.В.* О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Украинский математический журнал. – 2007. – № 12, **59**. – С. 112–127.
13. *Норкин Б.В.* О вычислении вероятности банкротства непуассоновского процесса риска методом последовательных приближений // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 2. – С. 133–144.
14. *Норкин Б.В.* Применение метода последовательных приближений для нахождения вероятности неразорения страховой компании при наличии случайных премий // Кибернетика и системний анализ. – 2006. – № 1. – С. 112–127.
15. *Норкин Б.В.* Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 116–130.

Получено 15.03.2010