УДК 517.98

К.Г. ДЗЮБЕНКО

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КОМПАКТНОГО СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Доказаны утверждения о диагонализации компактного симметричного оператора в каноническом пространстве, о сходимости собственных чисел и собственных значений приближающего конечномерного оператора.

Проблема диагонализации симметричного оператора является ключевой для линейных моделей. Она логически связана с задачами, рассмотренными в [1]. Пусть N, R и C – множества всех натуральных, действительных и комплексных чисел. Линейное пространство E будем называть *каноническим*, если задано *скалярное произведение* $(\cdot,\cdot):E\times E\to C$, удовлетворяющее аксиомам: 1) $(x,x)\geq 0$, и $(x,x)=0\Leftrightarrow x=\vec{0}$; 2) $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1(x_1,y)+\alpha_2(x_2,y)$, $\alpha_1,\alpha_2\in C$, $x_1,x_2,y\in E$; 3) $\overline{(x,y)}=(y,x)$, $x,y\in E$ ($\vec{0}$ – нулевой элемент E; верхняя черта над числом – комплексное сопряжение). Для $S\subset E$ *линейная оболочка* $\mathscr{L}(S)$ – минимальный линеал, содержащий S. *Норма вектора* $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, $x\in E$. *Базис* в E – линейно независимое множество $S\subset E$ с $\overline{\mathscr{L}(S)}=E$ (верхняя черта над множеством – замыкание в E по норме). Замкнутый линеал в E называется *подпространством*. $u\in E\setminus\{\vec{0}\}$ – *собственный вектор* оператора $A:E\to E$, соответствующий *собственному значению* $\lambda\in C$, если $Au=\lambda u$. Оператор $A:E\to E$ *симметричный (самосопряжённый)*, если $(Ax,y)=(x,Ay)$, $x,y\in E$. Это влечёт линейность A. Собственные числа симметричного оператора действительны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

$Ker_E A = \{x \in E : Ax = \vec{0}\}$ – *ядро*, $Im_E A = \{Ax : x \in E\}$ – *образ оператора* $A : E \to E$. Для $S_1, S_2 \subset E$ $S_1 \perp S_2$, если $(x, y) = 0, x \in S_1, y \in S_2$. $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ – *прямая сумма* S_1 и S_2, если каждое разложение $x = x_1 + x_2$ с $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ единственно. $S^{\perp} = \{x \in E : x \perp S\}$ – *ортогональное дополнение к* $S \subset E$. Матрица $(a_{nk})_{n,k \in N}$ *диагональная*, если $a_{nk} = 0$ при $n \neq k$. $(a_{nk})_{n,k \in N}$ *трёхдиагональная*, если $a_{nk} = 0$ при $|n - k| \geq 2$. $(a_{nk})_{n,k \in N}$ *самосопряженная*, если $\overline{a_{nk}} \equiv a_{kn}$. $(a_{nk})_{n,k \in N}$ *симметричная*, если $a_{nk} \equiv a_{kn}$. Пусть E *сепарабельно*, т.е. для счётного множества $S \subset E$ верно $\overline{S} = E$. Тогда в E есть не более чем счётный базис $\{e_n\}$. Для $x \in E$ $(x)_{\{e_n\}}$ – столбец из $x(n) = (x, e_n)$, $n \in N$. $(A)_{\{e_n\}} = ((Ae_n, e_k))_{n,k \in N}$ – *матрица оператора* $A : E \to E$. Если базис $\{e_n, n \in N\}$ ортонормирован, то $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$, $x \in E$ [1, с. 26], а действие линейного оператора $A : E \to E$ определяется его матрицей: $(Ax)_{\{e_n\}} = (A)_{\{e_n\}} (x)_{\{e_n\}}$, $x \in E$. $S \subset E$ A-*инвариантно*, если $Ax \in S$, $x \in S$. $I_{\{P\}}$ – функция истинности утверждения P. I_E – тождественный оператор в E. Матрица симметричного оператора в любом базисе самосопряжена. Матрица симметричного оператор в конечномерном пространстве диагональна в некотором ортонормированном базисе. Она трёхдиагональна симметрична действительна в ортонормированном базисе, получаемом явным построением ([3, с. 168]; также см. лемму). Множество $S \subset E$ *предкомпактно*, если $\overline{S}$ компактно. Оператор A в E *компактен*, если он отображает каждое ограниченное множество в предкомпактное. Последовательность $\{x_n, n \in N\} \subset E$ *сходится сильно* к $x_* \in E$ ($x_n \to x_*$), если $\lim_{n \to \infty} \|x_* - x_n\| = 0$. $\{x_n, n \in N\}$ в полном E *сходится слабо* к $x_* \in E$, если $\lim_{n \to \infty} (x_n, y) = (x_*, y)$, $y \in E$. $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_- = \{-n : n \in N\}$.

Лемма. Пусть E – каноническое пространство, A – ограниченный симметричный оператор в E, $x \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Положим $b_1(x) = \|x\|^{-1} x$,

$$\tilde{b}_{n+1}(x) = Ab_n(x) - \sum_{k=1}^{n} (Ab_n(x), b_k(x))\, b_k(x), \qquad b_{n+1}(x) = \left\|\tilde{b}_{n+1}(x)\right\|^{-1} \tilde{b}_{n+1}(x),$$

$n \in N$ (построение конечно, если $\tilde{b}_{n_*+1}(x) = \vec{0}$ для некоторого $n_* \in N$). Тогда верны следующие утверждения.

1. $\{b_n(x)\}$ – ортонормированный базис в $M_A(x) = \overline{\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})}$.
2. $(A)_{\{b_n(x)\}} = (a_{nk}(x))$ – трёхдиагональная симметричная действительная матрица, и $a_{n,n+1}(x) > 0$ для всех допустимых $n \in N$.
3. $M_A(x)$ – минимальное A-инвариантное подпространство, содержащее x.

Если также E полно и сепарабельно, то верны утверждения.

4. $E = \bigoplus_{j\in J} M_A(x_j)$, где $J \subset N$, $\{x_j, j \in J\} \subset E$, $M_A(x_j)$ – ортогональны.
5. Матрица оператора A в объединённом ортонормированном базисе $\{\{b_n(x_j)\}, j \in J\}$ трёхдиагональна, симметрична и действительна.

Доказательство. Далее в доказательствах $M_A(x) = M$, $b_n(x) = b_n$. Рассмотрим лишь случай бесконечных построений. 1. По определению $\overline{\mathscr{L}(\{b_n, n \in N\})} \subset \overline{\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})}$. Также верны $x = \| x \| b_1$, $Ax = \| x \| (a_{11} b_1 + a_{12} b_2)$. По индукции $A^k x \in \mathscr{L}(\{b_n, n \in N\})$, $k \in N_0$. Верно $\overline{\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})} \subset \overline{\mathscr{L}(\{b_n, n \in N\})}$, и $\overline{\mathscr{L}(\{b_n, n \in N\})} = \overline{\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})}$. По индукции $(b_{n+1}, b_m) = \| \tilde{b}_{n+1} \|^{-1} ((Ab_n, b_m) - (Ab_n, b_m)) = 0$, $m = \overline{1, n}$, $n \in N$. Также $\| b_n \| = 1$, $n \in N$, из определения. 2. $Ab_n = \sum_{k=1}^{n+1} (Ab_n, b_k) b_k$, $n \in N$, разложением по базису. Отсюда $a_{n,n+1} = (Ab_n, b_{n+1}) = \| \tilde{b}_{n+1} \| > 0$, $n \in N$. Для всех $n \in N$ и $k \in \{n+2, n+3, \ldots\}$ $(Ab_n, b_k) = 0$, $(Ab_k, b_n) = (b_k, Ab_n) = \overline{(Ab_n, b_k)} = 0$, и матрица (a_{nk}) трёхдиагональна. $a_{nn} = (Ab_n, b_n) \in R$ следует из $(Ab_n, b_n) = (b_n, Ab_n) = \overline{(Ab_n, b_n)}$. 3. Пусть $\tilde{M}$ – минимальное A-инвариантное подпространство, содержащее x. Оно замкнуто как пересечение всех таких подпространств. $M = \overline{\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})} \subset \tilde{M}$ ввиду $A^k x \in \tilde{M}$, $k \in N_0$. M A-инвариантно ввиду A-инвариантности $\mathscr{L}(\{A^k x, k \in N_0\})$ и непрерывности линейного ограниченного A в нормированном E. Поэтому $\tilde{M} \subset M$, и $\tilde{M} = M$. 4. Выберем любое $x_1 \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Для подпространства $M_1 = M_A(x_1)$ в полном E верно $E = M_1 \oplus M_1^{\perp}$, и $M_1^{\perp}$ – подпространство в E [2, с. 159]. Пусть для $m \in N$ выполнено $E = M_m \oplus M_m^{\perp}$, где $M_m = M_A(x_1) \oplus \ldots \oplus M_A(x_m) = \overline{\mathscr{L}(\{\{b_n(x_j)\}, j = \overline{1, m}\})}$ замкнуто, $x_j \in E$, $j = \overline{1, m}$, $M_A(x_j)$ взаимно ортогональны. Если найдётся $x_{m+1} \in M_m^{\perp} \setminus \{\vec{0}\}$, то построение продолжается. Оно конечно или счётно, как и размерность E. 5. Следует из утверждений 2 и 4.

В обозначениях леммы для каждого $m \in N$ рассмотрим:

- подпространство $L_m = \mathscr{L}(\{b_n(x), n = \overline{1,m}\})$;
- симметричный оператор $A_m : L_m \to L_m$, заданный соотношениями $A_m y = Ay - (Ab_{m+1}(x), b_m(x))(y, b_m(x))b_{m+1}(x)$, $y \in L_m$;
- $\lambda_m(-1) \le \lambda_m(-2) \le ... \le \lambda_m(k_1(m)) < \lambda_m(0) = 0 < \lambda_m(k_2(m)) \le ... \le$ $\le \lambda_m(2) \le \lambda_m(1)$ – m собственных значений A_m, где $k_1(m) \in N_-$, $k_2(m) \in N$ (могут быть реализованы не все указанные индексы);
- $K(m) = \{-1, -2, ..., k_1(m), 0, k_2(m), ..., 2, 1\}$;
- $u_m(k)$, $k \in K(m)$, – ортонормированные собственные векторы A_m: $A_m u_m(k) = \lambda_m(k) u_m(k)$, $k \in K(m)$. $u_m(k)$ выбраны так, что координаты $u_m(n,k) = (u_m(k), b_n(x))$, $n = \overline{1,m}$, $k \in K(m)$, в базисе $\{b_n(x)\}$ действительны и $u_m(1,k) \ge 0$, $k \in K(m)$.

Также $K(\infty) = \bigcup\limits_{m \in N} K(m) \setminus \{0\}$, $K_1(\infty) = K(\infty) \bigcap N_-$, $K_2(\infty) = K(\infty) \bigcap N$.
Верно $K(\infty) = K_1(\infty) \bigcup K_2(\infty)$. $M_A(x)$, $x \in E$, заданы согласно лемме.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:
1) E – полное каноническое пространство;
2) A – компактный симметричный оператор в E;
3) $x \in (Ker_E A)^{\perp} \setminus \{\vec{0}\}$.
Тогда верны следующие утверждения.
1. $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_m(k) = \lambda_*(k) \in R$, $k \in K(\infty)$.
2. $\lambda_*(k+1) < \lambda_*(k) < 0$, $k \in K_1(\infty)$; $0 < \lambda_*(k+1) < \lambda_*(k)$, $k \in K_2(\infty)$.
3. $u_m(k) \to u_*(k) \in M_A(x)$, $m \to \infty$, $k \in K(\infty)$, и $\| u_*(k) \| = 1$, $k \in K(\infty)$.
4. $Ker_{M_A(x)}(A - \lambda_*(k) I_{M_A(x)}) = \mathscr{L}(\{u_*(k)\})$, $k \in K(\infty)$; $Ker_{M_A(x)} A = \{\vec{0}\}$.
5. $u_*(k)$, $k \in K(\infty)$, – ортонормированный собственный базис в $M_A(x)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай бесконечномерного $M = M_A(x)$. 1. A ограничен в E ввиду компактности. Норме $\| y \| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(y, b_n)|^2 \right)^{1/2}$, $y \in M$, соответствует операторная норма

$\| A \|_M = \sup\limits_{\| y \|=1} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \sum\limits_{k \in \{n-1, n, n+1\}} a_{nk} (y, b_k) \right|^2 \right)^{1/2} < +\infty$ ($a_{10} = 0$). Согласно утверждению 3 леммы M A-инвариантно. Соответствующие $\| A_m \|_M$ не убывают, $\| A_m \|_M \leq \| A \|_M$, $m \in N$, и существует $\lim\limits_{m \to \infty} \| A_m \|_M \leq \| A \|_M$. Если собственные числа симметричного оператора A_m обозначены $\mu_m(1) \leq \mu_m(2) \leq \ldots \leq \mu_m(m)$, то $\mu_m(k) = \min\limits_{V_k \subset L_m} \max\limits_{x \in V_k,\, \| x \|=1} (A_m x, x)$, $k = \overline{1, m}$, где V_k – k-мерные подпространства L_m [3, с. 109]. Верны $\mu_{m+1}(k) \leq \mu_m(k) \leq \mu_{m+1}(k+1)$ для допустимых k, поскольку минимум не возрастает при расширении множества аргументов, а $\max\limits_{x \in V_k,\, \| x \|=1} (A_m x, x)$ не убывает при переходе к $m+1$ и $V_{k+1} \supset V_k$. Поэтому $\lambda_{m+1}(k) \leq \lambda_m(k) \leq \lambda_{m+1}(k-1)$, $k \in K_1(\infty)$; $\lambda_{m+1}(k+1) \leq \lambda_m(k) \leq \lambda_{m+1}(k)$, $k \in K_2(\infty)$. $\max\limits_{k=\overline{1,m}} \left| \lambda_m(k) \right| \leq \max\limits_{x \in L_m,\, \| x \|=1} \left| (A_m x, x) \right| \leq \| A_m \|_M \leq \| A \|_M$, $m \in N$. Сходимость монотонной ограниченной последовательности влечёт существование пределов в 1. 2. Среди $\lambda_m(k)$ есть ненулевые, иначе все A_m и A тождественно нулевые. Переход к пределу при $m \to \infty$ в неравенствах для $\lambda_m(k)$ влечёт $\lambda_*(k) \neq 0$, $k \in K(\infty)$ (из $0 < \left| \lambda_1(k) \right| \leq \left| \lambda_m(k) \right|$) и их невозрастание по k. Строгая монотонность доказана далее. 3. Пусть $\lambda \in R$. Уравнение $Au = \lambda u$ для $u \in M$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) u(1) + a_{12}\, u(2) = 0 \\ a_{n,n-1}\, u(n-1) + (a_{nn} - \lambda) u(n) + a_{n,n+1}\, u(n+1) = 0, \; n \geq 2. \end{cases}$$

Здесь $u(n) = (u, b_n) = u(1) \alpha(n, \lambda)$, $n \in N$, где $\alpha(n, \lambda) \in R$, $n \in N$ (из $a_{nn} \in R$, $a_{n,n+1} = a_{n+1,n} > 0$, $n \in N$). Подпространства $Ker_M (A - \lambda I_M)$, $\lambda \in R$, имеют размерность 0 или 1. Зададим любое $k \in K(\infty)$. Для всех $m \in N$, удовлетворяющих $k \in K(m)$, верна система уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_m(k)) u_m(1, k) + a_{12}\, u_m(2, k) = 0 \\ a_{n,n-1} u_m(n-1, k) + (a_{nn} - \lambda_m(k)) u_m(n, k) + a_{n,n+1}\, u_m(n+1, k) = 0, \; n = \overline{1, m-1} \\ a_{m,m-1}\, u_m(m-1, k) + (a_{mm} - \lambda_m(k)) u_m(m, k) = 0, \end{cases}$$

$u_m(1, k) \neq 0$, иначе $u_m(n, k) = 0$, $n = \overline{1, m}$, а $\| u_m(k) \| \equiv 1$. Из определения A_m

$$A u_m(k) = \lambda_m(k) u_m(k) + a_{m+1,m}\, u_m(m, k) b_{m+1}, \; k \in K(m), \; m \in N. \qquad (1)$$

$M=\overline{\mathscr{L}(\{b_n, n\in N\})}$ полно как подпространство полного E и является l_2-пространством. В l_2 покоординатная сходимость эквивалентна слабой сходимости [2, с. 196]. Для компактного A в полном M из слабой сходимости b_m к $\vec{0}$ следует $Ab_m\to\vec{0}$ [2, с. 246]. Но $\| Ab_m\|^2=(a_{m-1,m})^2+(a_{mm})^2+(a_{m+1,m})^2$, $m\geq 2$, откуда $\lim\limits_{m\to\infty} a_{m+1,m}=0$. Верны $|u_m(m,k)|\leq \| u_m(k)\|=1$, $m\geq k$, и $\| b_m\|\equiv 1$. Утверждение 1 влечёт $(\lambda_m(k)-\lambda_*(k))u_m(k)\to\vec{0}$, $m\to\infty$. В силу (1) $(A-\lambda_*(k)I_M)u_m(k)\to\vec{0}$, $m\to\infty$. Зададим симметричный линейный оператор $B=A-\lambda_*(k)I_M$ в M. Верны $M=\overline{Im_M B}\oplus(\overline{Im_M B})^{\perp}=$ $=\overline{Im_M B}\oplus Ker_M B$ ввиду $y\perp\overline{Im_M B}\Leftrightarrow y\perp Im_M B\Leftrightarrow (y,Bx)=0, x\in E\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(By,x)=0, x\in E\Leftrightarrow y\in Ker_M B$ и замкнутости $Ker_M B=(\overline{Im_M B})^{\perp}$ ([2, с. 159]; использована непрерывность $(\cdot,\cdot)$). Предположим, что $Ker_M B=\{\vec{0}\}$. Ввиду $\lambda_*(k)\neq 0$ и компактности A образ оператора $B=A-\lambda_*(k)I_M$ в полном M замкнут [2, с. 469], и $M=Im_M B$. Ограниченный B взаимно однозначно отображает полное M на себя. По теореме Банаха об обратном операторе [2, с. 225] существует ограниченный обратный $B^{-1}:M\to M$. Из $Bu_m(k)\to\vec{0}$ следует $u_m(k)\to\vec{0}$, что противоречит $\| u_m(k)\|\equiv 1$. Поэтому найдётся $u_*(k)\in M$ с координатами $u_*(n,k)=u_*(1,k)\alpha(n,\lambda_*(k))\in R$, $n\in N$, и $u_*(1,k)>0$ такой, что $Au_*(k)=\lambda_*(k)u_*(k)$ и $\| u_*(k)\|=1$. Тогда $Ker_M B=\{\beta u_*(k), \beta\in C\}=\mathscr{L}(\{u_*(k)\})$ (размерность 1). Умножая $Bu_*(k)=\vec{0}$ на $(u_m(k),u_*(k))$ и вычитая из $Bu_m(k)\to\vec{0}$, приходим к $Bz_m\to\vec{0}$, где $z_m=u_m(k)-(u_m(k),u_*(k))u_*(k)$, $m\in N$. Замкнутость $Im_M B$ влечёт $(Ker_M B)^{\perp}=Im_M B$, полноту $Im_M B$. Отображение $B:Im_M B\to Im_M B$ взаимно однозначно. Аналогично существует непрерывный обратный оператор $B^{-1}:Im_M B\to Im_M B$. $z_m\in Im_M B$ из $z_m\perp u_*(k)$, $m\in N$. Поэтому $z_m=B^{-1}Bz_m\to\vec{0}$, $|(u_m(k),z_m)|\leq\| u_m(k)\|\| z_m\|\to 0$, и $(u_m(k),u_*(k))^2=$ $=\| u_m(k)-z_m\|^2=\| u_m(k)\|^2-(u_m(k),z_m)-(z_m,u_m(k))+\| z_m\|^2\to 1$. Если для $\{m(l)\}\subset N$ верно $(u_{m(l)}(k),u_*(k))\to -1$, $l\to\infty$, то $u_{m(l)}(k)=z_{m(l)}+$ $+(u_{m(l)}(k),u_*(k))u_*(k)\to -u_*(k)$, $l\to\infty$. Это противоречит $u_m(1,k)>0$, $m\in N$, и $u_*(1,k)>0$. Поэтому $(u_m(k),u_*(k))\to 1$ и $u_m(k)\to u_*(k)$, $m\to\infty$.

4. Первая часть доказана. Выполнено $Ker_E A \perp \overline{\mathscr{L}(\{A^n x, n \in N_0\})}$ ввиду $(y, A^n x) = (A^n y, x) = 0$, $n \in N_0$, $y \in Ker_E A$. Отсюда $Ker_M A = \{\vec{0}\}$. 5. $(u_*(k_1), u_*(k_2)) = \lim\limits_{m\to\infty} (u_m(k_1), u_m(k_2)) = I_{\{k_1=k_2\}}$, $k_1, k_2 \in K(\infty)$ (по непрерывности $(\cdot,\cdot)$). Тогда утверждение 4 влечёт $\lambda_*(k_1) \neq \lambda_*(k_2)$, $k_1 \neq k_2$, и строгие неравенства в утверждении 2. Положим $M_* = \overline{\mathscr{L}(\{u_*(k), k \in K(\infty)\})}$. Зададим любое $n \in N$. Докажем $Ab_n \in M_*$.

$$Ab_n = \sum_{k\in K(m)} (Ab_n, u_m(k))\, u_m(k) = \sum_{k\in K(m)\setminus\{0\}} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))\, u_*(k) + v_m,\ m \geq n,$$

где $v_m = \sum\limits_{k\in K(m)\setminus\{0\}} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))(u_m(k) - u_*(k))$ (с учётом симметричности A, $Au_m(k) = \lambda_m(k)\, u_m(k)$ и $\lambda_m(0) = 0$). Для всех $m \geq n$, $k_0 \in N$ верны

$$\| v_m \| \leq \left\| \sum_{k\in K(m)\setminus\{0\},\, |k| \leq k_0} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))(u_m(k) - u_*(k)) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k\in K(m)\setminus\{0\},\, |k| > k_0} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))\, u_m(k) \right\| + \left\| \sum_{k\in K(m)\setminus\{0\},\, |k| > k_0} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))\, u_*(k) \right\| \leq$$

$$\leq 2k_0 \| A \| \max_{k\in K(m)\setminus\{0\},\, |k| \leq k_0} \| u_m(k) - u_*(k) \| + 2\sqrt{h_m(k_0)}\,, \tag{2}$$

где $h_m(k_0) = \sum\limits_{k\in K(m)\setminus\{0\},\, |k| > k_0} |\lambda_m(k)|^2 |(b_n, u_m(k))|^2$. Использованы неравенства $\| y_1 + y_2 \| \leq \| y_1 \| + \| y_2 \|$, $|\lambda_m(k)| \leq \| A \|$, $|(b_n, u_m(k))| \leq 1$, $k \in K(m)$, и ортонормированность $\{u_m(k)\}$, $\{u_*(k)\}$. Ввиду полноты M и компактности A верно $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \lambda_*(k) = 0$ [2, с. 244-245]. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{k}_0 \in N$ такое, что $|\lambda_m(k)| \leq |\lambda_*(k)| < \varepsilon/4$, $k \in K(m)\setminus\{0\}$, $|k| > \tilde{k}_0$, $m \geq n$. Верно $h_m(\tilde{k}_0) < \varepsilon^2/16$, $m \geq n$, ввиду $\sum\limits_{k\in K(m)} |(b_n, u_m(k))|^2 = \|b_n\|^2 = 1$. Существует $m_0 \in N$ ($m_0 \geq n$) такое, что $\| u_m(k) - u_*(k) \| \leq \left(4\tilde{k}_0 \| A \|\right)^{-1} \varepsilon$, $k \in K(m)\setminus\{0\}$, $|k| \leq \tilde{k}_0$, $m \geq m_0$. Полагая $k_0 = \tilde{k}_0$ в (2), заключаем, что $\| v_m \| < \varepsilon/2 + 2\sqrt{\varepsilon^2/16} = \varepsilon$, $m \geq m_0$. Следовательно, $v_m \to \vec{0}$, и векторы $\sum\limits_{k\in K(m)\setminus\{0\}} \lambda_m(k)(b_n, u_m(k))\, u_*(k) \in M_*$ сходятся к Ab_n при $m \to \infty$. Значит

$Ab_n \in M_*$, $n \in N$ (из замкнутости M_*), и $\overline{Im_M A} = \overline{\mathscr{L}(\{Ab_n, n \in N\})} \subset M_*$. Но $M_* \subset M = \overline{Im_M A} \oplus Ker_M A = \overline{Im_M A}$, откуда $M = M_*$. Теорема доказана.

Комментарии. 1. В условиях 1), 2) теоремы 1 для каждого $x \in E$ верно либо $Ax = \vec{0}$, либо $Ax \in (Ker_E A)^{\perp} \setminus \{\vec{0}\}$. 2. Если даже $\lambda_m(0) = 0$ и $u_m(0)$ встречаются при некоторых m, в пределе это не приводит к появлению собственного вектора, соответствующего собственному значению ноль.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:
1) E – полное сепарабельное каноническое пространство;
2) A – компактный симметричный оператор в E.
Тогда в ортонормированном базисе $\{u_*(k; x_j), k \in K_j, j \in J\}$ пространства E матрица оператора A диагональна с собственными числами на диагонали, и каждое из них встречается конечное число раз, не более одного для каждого $M_A(x_j)$. Здесь $J \subset N$, и для каждого $j \in J$ $x_j \in E$, $K_j \in N_- \bigcup N$, $\{u_*(k; x_j), k \in K_j\}$ – ортонормированный собственный базис в $M_A(x_j)$.

Доказательство. Согласно лемме $E = \bigoplus\limits_{j \in J} M_A(x_j)$. $x_j \in Ker_E A$ порождают одномерные $M_A(x_j)$. Им ортогональны остальные $M_A(x_j)$, и для их x_j обеспечено условие 3) теоремы 1. Кратность каждого собственного числа компактного оператора в полном пространстве конечна [2, с.245].

Пример 1. Пусть $[t_1, t_2] \subset R$, и измеримая функция $K : [t_1, t_2]^2 \to C$ такова, что $\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} |K(s,t)|^2 \, ds\, dt < +\infty$. $(Ax)(s) = \int\limits_{t_1}^{t_2} K(s,t)\, x(t)\, dt$, $s \in [t_1, t_2]$, – линейный оператор в $E = L_2[t_1, t_2]$ ($(x, y) = \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\overline{y(t)}\, dt$). A компактен [2, с. 461-462]. Если также $\overline{K(s,t)} \equiv K(t,s)$, то A симметричен [2, с. 463], и для него выполнены теоремы 1 и 2.

Пример 2. $(Ax)(t) = t\, x(t)$, $t \in [0,1]$, – симметричный линейный оператор в $E = L_2[0,1]$ ($\int\limits_0^1 t\, x(t)\overline{y(t)}\, dt \equiv \int\limits_0^1 x(t)\overline{t\, y(t)}\, dt$). Рассмотрим ортонормированный базис в E: $e_0(t) = 1$, $e_n(t) = \sqrt{2}\cos(n\pi t)$, $t \in [0,1]$, $n \in N$ [2, с. 392-393]. e_n слабо сходится к $\vec{0}$, так как E полно и для всех $y \in E$ $(y, e_n) \to 0$ (из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2 = \|y\|^2 < +\infty$). С другой стороны $\|Ae_n\|^2 = 2\int\limits_0^1 t^2 \cos^2(n\pi t)\, dt =$

$= \int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 t^2 \cos(2n\pi t)\, dt \to \frac{1}{3} \neq 0$, $n \to \infty$. Следовательно, A не компактен [2, с. 246]. A не диагонализируем так как не имеет собственных векторов: при каждом $\lambda \in R$ $(t-\lambda)\, u(t) \equiv 0$ влечёт $u(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. В частности, $Ker_E\, A = \{\vec{0}\}$. В базисе $\{b_n(x_1)\}$ с $x_1(t) \equiv 1$ матрица оператора A трёхдиагональна, симметрична и действительна. В обозначениях теоремы 1 $\lambda_m(k) \to \lambda_*(k) \in [-1,1]$, $m \to \infty$, $k \in K(\infty)$, поскольку утверждение 1 теоремы верно и для ограниченных A, а $\| A \|^2 = \sup_{\| x \| = 1} \int_0^1 t^2 \left| x(t) \right|^2 dt \le 1$. Среди $\lambda_*(k)$ есть ненулевые – однако им не соответствуют собственные векторы.

В начале 20-го века было осуществлено доказательство того, что компактный симметричный оператор в полном сепарабельном каноническом пространстве диагонализируем [2, с. 246-247]. Я построил своё доказательство такого рода утверждения, а также доказательство сходимости собственных чисел и собственных векторов приближающего конечномерного оператора. Это важно, например, для поиска решений интегральных уравнений $Ax - \lambda x = y$ с оператором A из примера 1.

К.Г. Дзюбенко

ДІАГОНАЛІЗАЦІЯ КОМПАКТНОГО СИМЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Доведено твердження про діагоналізацію компактного симетричного оператора у канонічному просторі, про збіжність власних чисел та власних векторів наближуючого скінченновимірного оператора.

K.G. Dziubenko

DIAGONALIZATION OF COMPACT SYMMETRIC OPERATOR

Statements are proved on diagonalization of compact symmetric operator in canonical space, on convergence of eigen-values and eigen-vectors of approximating finite-dimensional operator.

1. *Дзюбенко К.Г.* Ортогональные разложения пространств и их применения // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – № 9. – С. 25 – 32.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
3. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычислен. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

Получено 22.03.2011