УДК 519.8

Г.А. ДОНЕЦ, С.Т. КУЗНЕЦОВ

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ЛОГИЧЕСКОГО ТИПА

Предлагается задача, в которой за минимальное количество шагов необходимо среди n-элементного множества найти подмножество, обладающее определенными свойствами. Приводятся некоторые результаты решения задачи.

Введение. Эта задача появилась впервые в 1966 г. на Московской математической олимпиаде в двух вариантах.

Вариант 1. Из 19 биллиардных шаров два радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный (но нельзя узнать сколько их). Доказать, что за 8 проверок можно обнаружить радиоактивную пару шаров.

Вариант 2. В условиях задачи варианта 1 доказать, что оба радиоактивных шара среди 11 можно найти за 7 проверок.

В данной работе решается более общая задача: задано n биллиардных шаров, среди которых два шара радиоактивны. Необходимо их обнаружить за минимальное число проверок.

Очевидно, что данная задача возникает в различных практических направлениях, особенно в тех ситуациях, где каждая проверка связана с определенными материальными потерями.

Методы решения задачи. Сформулируем общие принципы, применяемые при решении подобных задач.

1. Если из 2^s шаров радиоактивный (далее активный) один, то его можно найти за s проверок (испытаний): первым шагом проверить половину шаров, затем методом дихотомии проверить то множество шаров, где находится активный шар.

2. Если шаров больше, чем 2^s, то за s шагов нельзя обеспечить отыскание одного активного шара. Предположим противное.

Сделаем s испытаний, отмечая наличие радиоактивности плюсом, а ее отсутствие – минусом. По предположению, зная возникшую последовательность знаков, можно указать, какой из шаров активный. Но разных последовательностей длины s из двух знаков существует всего 2^s. Указав по каждой из них активный шар, получим нелепый вывод о том, что те шары, которым не соответствует никакая последовательность, не могут быть активными.

3. Если из n шаров активных 2, то имеется $C_n^2 = n(n-1)/2$ вариантов различных активных пар. Поэтому, если $n(n-1)/2 > 2^s$, то за s испытаний не удастся найти активную пару.

4. Если из n шаров первым шагом испытываем k шаров, то исход испытания “–“ соответствует C_{n-k}^2 вариантам (оба активных шара находятся среди $n-k$ оставшихся), а исход “+“ – остальным $C_n^2 - C_{n-k}^2$ вариантам. Если в нашем распоряжении осталось i испытаний, то обязательно должно быть $C_{n-k}^2 \le 2^i$ и $C_n^2 - C_{n-k}^2 \le 2^i$.

5. Если за s проверок удалось решить задачу для n шаров, то для меньшего количества шаров можно решить задачу также за s проверок. Это вытекает из тех соображений, что тот же результат можно достигнуть, если дополнить множество шаров до n фиктивными (неактивными) шарами. Это означает, что для двух одинаковых значений s и разных значений n для всех промежуточных значений количества шаров задача решается за те же s проверок.

При решении задачи будем строить стратегию последовательных испытаний. Если очередная проверка (выбор количества и индивидуальных шаров) не зависит от предыдущей проверки, назовем такую стратегию независимой. Если же определение количества шаров и их индивидуальность зависит от исхода предыдущей проверки, то назовем такую стратегию пошаговой.

Для независимой стратегии определяющим является построение разбиения n шаров на m частей $R_n = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, где k_i – количество шаров, испытываемых на i- м шаге $(1 \le i \le m)$, и $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. После m испытаний, в зависимости от знаков, задача сводится либо к получению одного множества (с меньшим количеством), содержащего оба активных шара, либо к двум множествам, содержащим по одному активному шару.

Введем обозначения трех функций, которые пригодятся для дальнейших поисков решения задачи:

$f_2(n)$ – минимальное число проверок для поиска двух активных шаров из n заданных;

$f_1(n)$ – минимальное число проверок для поиска одного активного шара из n заданных;

$g(n_1, n_2)$ – минимальное число проверок для обнаружения двух активных шаров, которые находятся по одному в двух подмножествах из n_1 и соответственно n_2 шаров.

Из принципа 2 вытекает очевидное равенство $f_1(n)=\lceil \log_2 n \rceil$. Однако, как будет показано ниже, $g(n_1, n_2) \le f_1(n_1)+f_1(n_2)$, причем возможно и строгое неравенство. Докажем ряд утверждений, которые необходимы для построения оптимальных независимых стратегий.

Лемма 1. При независимой стратегии решения задачи

$$f_2(n) \le m + f_2\left(\max_i k_i\right), \ (1 \le i \le m).$$

Это следует из того, что после m проверок знак “+“ получит группа с максимальным значением k_i, а остальные получат знак “–“.

Эта лемма налагает определенные ограничения на разбиение n шаров на m групп. С другой стороны, при составлении стратегии разбиения необходимо выбирать k_1 так, чтобы после получения результата “–“ значение $f_2(n-k_1)$ было меньше ожидаемого $f_2(n)$.

Лемма 2. Для независимой стратегии решения задачи необходимо, чтобы $f_2(n) \le m + g(a, b)$, где $a, b \in R$ и $a+b = \max \sum_{i,\ j} (k_i + k_j), \ i, j \in N_m$.

Это следует из того, что если результат “+“ дадут две проверки для $\max k_i \ (1 \le i \le m)$ и для $\max k_j \ (j \in N_m \setminus i)$, то общее число проверок будет равно в худшем случае $m + g(a, b)$, где a и b равны этим двум элементам разбиения.

Лемма 3. $g\left(2^k+1, 2^l+1\right) = k + l + 1 + \left\lfloor \frac{1}{kl} \right\rfloor (k + l \ge 3)$.

Для доказательства воспользуемся методом, который далее будем называть комбинированным. Возьмем по одному шару из каждого множества и проверим их вместе. Если получим “–“, то оставшиеся шары в количестве 2^k и 2^l согласно принципу 1 требуют $k+l$ проверок для определения активной пары шаров. Если получен результат “+“, то проверяем одну из оставшихся групп, например, содержащую 2^k шаров. Если получим знак “+“, то в первой проверке шар из этого множества был неактивным, зато из второй группы – наверняка активный. Осталось за k проверок найти второй активный шар в первой группе, что в сумме дает $k+2$ проверки. Если же получим знак “–“, то в первой проверке шар из этой группы был активным. Второй шар из второй группы найдем за

$f_1\left(2^l+1\right)=l+1$ шагов, а весь поиск за $l+3$ шагов. В результате $g\left(2^k+1,\,2^l+1\right)=\max\left\{k+l+1,\,k+2,\,l+3\right\}$. Вторую величину можно исключить, так как для произвольных l $k+l+1\geq k+2$. Необходимо еще включить в рассмотрение и раздельную проверку каждой группы, которая требует $\left|\log_2(2^k+1)\right|+\left|\log_2(2^l+1)\right| = k+l+2$ проверок. Иногда это число может оказаться оптимальным. В общем случае необходимо определить величину

$$g=\min\{k+l+2,\max(k+l+1,l+3)\}.$$

Очевидно, что для $k\geq 2$ решением есть $g=k+l+1$, а для $lk=1$ получаем $g=\min\{l+3,\max(l+2,l+3)\}=l+3<k+l+1$. Чтобы иметь общую формулу, добавим величину $\left\lfloor\frac{1}{kl}\right\rfloor$ и тогда $g\left(2^k+1,\,2^l+1\right)=k+l+1+\left\lfloor\frac{1}{kl}\right\rfloor$, что требовалось доказать.

Очевидно, что способ проверки, примененный при доказательстве леммы, лучше, чем раздельная проверка каждой группы, которая требует $\left|\log_2\left(2^k+1\right)\right|+\left|\log_2\left(2^l+1\right)\right|=k+l+2$ проверок.

Следствие. $g\left[2^\alpha\left(2^k+1\right),\,2^\beta\left(2^l+1\right)\right]=\alpha+\beta+k+l+1\quad(\alpha,\beta\geq 0;\,k+l\geq 3)$.

Это легко проверить, так как путем деления α раз первой группы и β раз второй группы придем к условию леммы 3. Это дает возможность свести аргументы функции $g\left(n_1,\,n_2\right)$ к нечетным значениям.

Рассмотрим частный случай, когда $k=1$, т. е. функцию $g\left(3,\,2^l+1\right)$. Если использовать лемму 3, то получим соответствующую формулу $g\left(3,\,2^l+1\right)=l+2+\left[\frac{1}{l}\right]\,(l\geq 1)$. Здесь добавка $\left[\frac{1}{l}\right]$ используется только для $g(3,3)=4$, а для $l>1$ значение функции всегда равно $l+2$. Обозначим $I_j(j\geq 0)$ множество значений i, где $g(3,i)$ принимает значение $j+2$, и назовем его j-м интервалом. Верхнюю границу j-го интервала обозначим t_j, тогда $I_j=\left(t_{j-1}+1,\,t_j\right)$. Пусть I_0 и I_1 состоят из одного элемента – $I_0=(1)$, $I_1=(2)$, тогда $t_0=1$, $t_1=2$. Очевидно, что $g(3,\,1)=2$, а $g(3,\,2)=3$.

Если $g(3,i)$ известны для крайних элементов какого-либо интервала, то согласно принципу 5 $g(3,i)$ равно тому же значению и для всех элементов этого интервала. Третий интервал отличается от второго тем, что его границы в два раза больше, а $g(3,i)$ соответственно больше на единицу. Умножая на 2 границы третьего интервала, получаем подинтервал (12, 20), который принадлежит I_4. Остается выяснить, где находится элемент $i=11$. Комбинаторным методом находим $g(3,11)=6$, т. е. $11\in I_4$. Умножая на 2 это число, получаем $22\in I_5$. Необходимо выяснить, в каком интервале находится $i=21$. Вычисляя непосредственно тем же способом, находим $g(3,\,21)=6$, и $21\in I_4$. Продолжая те же рассуждения и действия, можно постепенно найти непосредственные формулы для определения $g(3,\,i)$.

Теорема 1. Справедливы следующие соотношения:

$$\text{а) } t_j = 2^j + t_{j-2}\text{; б) } t_j = \frac{2^{j+2} - 2^{j\,(\mathrm{mod}\,2)}}{3}.$$

Доказательство первого утверждения проведем по индукции. Для $j=2$ $t_2 = 2^2 + t_0 = 5$; для $j=3$ $t_3 = 2^3 + t_1 = 8+2 = 10$. Пусть утверждение верно для какого-либо $j\ge 3$. Докажем его справедливость для $j+1$. Находим $g\left(3,\,2^{j+1}+t_{j-1}\right)$ комбинированным способом.

Первым шагом проверяем $1+t_{j-1}$ шаров. Если получаем результат “–“, то активные шары находим за $f_1(2)+f_1\left(2^{j+1}\right)$проверок. В сумме имеем $j+3$ проверки. Рассмотрим результат “+“. Берем теперь для проверки 2^{j+1} шаров. Если получим “+“, то в первой проверке шар из первой группы был активен. Второй шар из второй группы найдем за $j+1$ шаг. Вместе с двумя первыми проверками это дает $j+3$ проверки. Если же получим “–“, то задача сводится к определению $g\left(3,\,t_{j-1}\right)$, что по индукции равно $(j-1)+2=j+1$. В сумме с двумя первыми опять получаем $j+3$ проверки. Это дает $g\left(3,\,t_{j+1}\right)=j+3$, что и завершает доказательство утверждения а).

Второе утверждение докажем непосредственно. Для $j=0$ получаем $t_0 = \dfrac{2^2-1}{3} = 1$; для $j=1$ $t_1 = \dfrac{2^3-2}{3} = 2$.Для $t_j \ge 2$, используя утверждение а), получаем

$$t_j = 2^j + t_{j-2} = 2^j + \frac{2^j - 2^{(j-2)(\mathrm{mod}\,2)}}{3} = \frac{4\cdot 2^j - 2^{j(\mathrm{mod}\,2)}}{3} = \frac{2^{j+2} - 2^{j(\mathrm{mod}\,2)}}{3},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Так как в числителе t_j вычитается число меньше 3, то $t_j = \left\lfloor \dfrac{2^{j+2}}{3} \right\rfloor$, а $I_j = \left(\left\lfloor \dfrac{2^{j+1}}{3} \right\rfloor + 1,\ \left\lfloor \dfrac{2^{j+2}}{3} \right\rfloor \right)$ и $g(3,\,i) = \lceil \log_2(3i) \rceil$.

Для определения $g(3,\,i)$ необходимо ь решить неравенство

$$\frac{2^{j+1} - 2^{1-j\,(\mathrm{mod}\,2)}}{3} \le i \le \frac{2^{j+2} - 2^{j\,(\mathrm{mod}\,2)}}{3} \le \left\lfloor \frac{2^{j+2}}{3} \right\rfloor.$$

Отсюда $3i \le 2^{j+2}$ и $\lceil \log_2(3i) \rceil = j+2 = g(3, i)$.

Рассмотрим теперь функцию $g(n_1, n_2)$, где $n_1 = 2^k + 3$, а $n_2 = 2^l + 1$. Здесь $l \ge 2$, так как при $l = 1$ функция сводится к виду $g(3, i)$, которая рассматривалась выше. Очевидно, что и $k \ge 2$, иначе ее можно свести к такому виду $g\left(2^{k+1} + 1,\ 2^l + 1\right)$, значение которой находится по лемме 3. В общем случае задача сводится к определению величины

$g = \min\{k + l + 2,\ \max(k + l + 1,\ l + 4)\}$ для $k, l \ge 2$.

Очевидно, что кроме $k = 2$ выражение $k + l + 1$ при других значениях k дает лучший ответ для g. Отсюда получаем утверждение.

Лемма 4. $g\left(2^k + 3,\ 2^l + 1\right) = k + l + \left\lfloor \frac{2}{k} \right\rfloor + 1,\ (k, l \ge 2)$.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 5. $g\left(2^k + 5,\ 2^l + 1\right) = k + l + \left\lfloor \frac{3}{k} \right\rfloor + 1,\ (k \ge 3,\ l \ge 2)$.

Здесь $k \ge 3$, иначе n_1 можно представить в виде $2^a + 1\ (a \ge 1)$ или $2^b + 3\ (b \ge 2)$ и для вычисления функции воспользоваться леммами 3 и 4. После всех рассуждений, как и при доказательстве леммы 4, придем к ситуации, когда необходимо определить величину

$$g = \min\{k + l + 2,\ \max(k + l + 1,\ l + 5)\}\ (k \ge 3,\ l \ge 2).$$

Здесь также убеждаемся, что выражение $n + k + 1$ есть подходящим для g, кроме значения $k = 3$. Поэтому и получим искомую формулу.

Переходим теперь к изучению функции $f_2(n)$.

Теорема 2. $f_2(2^s) = 2s\ (s \ge 3)$.

Легко установить, что $f_2(4) = 3$, проверяя по одному шару. Пусть $n = 8 = 2^3$. Разобьем шары на равные части по 4. Если получим при проверке результат $(+,\ -)$ или $(-,\ +)$, то достаточно сделать еще $f_2(4)$ измерений, а всего $2 + 3 = 5$. Но при результате $(+,\ +)$ придется сделать $2 + 2f_1(4) = 6$ проверок, что окончательно дает $f_2(2^3) = 6$. Предположим теперь, что теорема верна для $s \ge 3$. Докажем ее справедливость для $n = 2^{s+1}$. Пусть сначала $m = 2$, т. е. множество шаров разбивается на две группы по 2^s шаров, которые последовательно проверяются. Возможны три исхода $(+,\ +)$, $(+, -)$ и $(-,\ +)$, где два последних идентичны. В первом случае $f_2\left(2^{s+1}\right)$ равна $2 + 2f_1\left(2^s\right)$ и по предположению это равно $2 + 2s = 2(s+1)$. В остальных случаях получаем

$f_2\left(2^{s+1}\right)=2+f_2\left(2^s\right)=2(s+1)$. При любом исходе справедливость теоремы подтверждается. Проверим другие разбиения на две группы, которые имеют вид $R=\left(2^s+c,\ 2^s-c\right)$, где $c\geq 1$. Тогда при исходе двух проверок $(+,\ -)$ получим оценку $g\left(2^{s+1}\right)=2+f_2\left(2^s+c\right)\geq 2+2s$. Аналогичную оценку получим для разбиения, симметричного R, если результат проверок даст результат $(-,\ +)$. Пусть теперь $m\geq 3$. Если $k_1\geq 2^s$, то при результате проверок $(+,\ -,\ -\ ...)$ получим оценку $f_2\left(2^{s+1}\right)=m+f_2(k_1)\geq 2s+3$. Если же $k_1<2^s$, то при первом результате "–" получим оценку $f_2\left(2^{s+1}\right)=1+f_2\left(2^{s+1}-k_1\right)$. Так как $2^{s+1}-k_1>2^s$, то это $\geq 2s+1$. Если активные шары находятся в каких-то двух оставшихся группах, то необходимо сделать, как минимум, еще две проверки. Если же активные шары находятся в одной из оставшихся групп, то двух проверок недостаточно, а придется проверять все оставшиеся группы. В любом из этих вариантов всегда $f_2\left(2^{s+1}\right)\geq 2s+3$, что и подтверждает справедливость теоремы.

Рассмотрим произвольное число n и его двоичное разложение $n=\left(i_p,\ i_{p-1},\ ...\ i_1,\ i_0\right)$, где $i_j\ (0\leq j\leq p)$ равно 0 или 1, а $p=\lceil\log_2 n\rceil$. Очевидно, что $i_p=1$. Рассмотрим вектор $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...\ ,\alpha_m)$, где α_i равно номеру i-й единицы в двоичном разложении числа n. По определению $\alpha_m=p$, а всего единиц равно m. Если число n нечетное, то $\alpha_1=0$. Назовем вектор α позиционным вектором двоичного разложении n. Так, например, пусть $n=1130$. Его двоичное разложение имеет вид (10001101010), поэтому $p=10$, $m=5$, а его позиционный вектор $\alpha=(1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10)$.

На основании доказанных лемм и теорем рассмотрим конкретные значения $f_2(n)$. Для $n=3,4,5$ легко найти пару активных шаров, проверяя их по одному. Получим $f_2(3)=2$, $f_2(4)=3$, $f_2(5)=4$. Далее применяем независимую стратегию путем построения разбиений и проверкой каждой группы отдельно. Для $n=6$ существует два разбиения, приводящих к решению: $R_1=(4,\ 2)$ и $R_2=(2,\ 2,\ 2)$. В обоих случаях получим $f_2(6)=5$. Аналогично можно показать, что $f_2(7)=5$, $f_2(8)=f_2(9)=f_2(10)=6$.

Для $n=11$ при выборе k_1 будем придерживаться той же стратегии. Разбиения $R_1=(5,\ 3,\ 3)$ и $R_2=(5,\ 4,\ 2)$ дают результат $f_2(11)=7$. Для $n=12$ подходит разбиение $R=(4,\ 4,\ 4)$, для $n=13$ – $R=(4,\ 4,\ 4,\ 1)$, для $n=14$ – $R=(4,\ 4,\ 4,\ 2)$.

Легко проверяется, что $f_2(n)=7$ для $11 \le n \le 14$. Для $n=16$ по теореме 2 $f_2(16)=8$. Необходимо вычислить $f_2(15)$, которое равно 7 или 8.

Лемма 7. $f_2(15)=7$.

Доказательство. В первой проверке полагаем $k_1 = 5$. Если результат "–", то в оставшихся 10 шарах, как известно, два активных шара можно найти за 6 проверок, что пока удовлетворяет лемме. При результате "+" делаем проверку 5 шаров, куда включаем один из уже проверенных и четыре новых. Если результат "–", то удаляем эти шары, а оставшиеся 6 шаров разбиваем на две группы 4+2, и последовательно их проверяем. С учетом первых двух проверок могут возникнуть такие последовательности знаков: (+, –, +), тогда g(4,4) = 4 и $f_2(15)=3+4=7$; (+, –, –, +), тогда g(4,2) = 3 и $f_2(15)=4+3=7$; (+, –, –, –), тогда $f_2(15)=4+f_2(4)=4+3=7$. Остается исследовать случай, когда во второй проверке получим результат "+". Тогда третьим шагом проверяем общий для двух проверок шар. Если он активный, то второй шар найдем среди 14 оставшихся за $f_1(14)=4$ проверок, что в сумме 3 + 4 = 7 проверок. Если он неактивный, то после его удаления задача сводится к вычислению g(4,4) = 4 первых двух групп, что в сумме дает тот же ответ. Этим и завершается доказательство леммы.

Для n = 16 по теореме 2 $f_2(16)=8$. Для $17 \le n \le 21$ $f_2(n)=8$, в чем легко убедиться непосредственно из следующих разбиений: R_{17} = (4, 4, 4, 4, 1), R_{18} = (4, 4, 4, 4, 2), R_{19} = (7, 8, 4), R_{20} = (5, 10, 5), R_{21} = (6, 10, 5). Для n = 22 решение будет приведено в последующих работах.

Г.П. Донець, С.Т. Кузнєцов

ПРО ОДНУ КОМБІНАТОРНУ ЗАДАЧУ ЛОГІЧНОГО ТИПУ

Пропонується задача, в якій за мінімальну кількість кроків необхідно серед n-елементної множини знайти підмножину, яка має певні властивості. Наводяться деякі результати розв'язання задач.

G.A. Donets, S.T. Kuznetsov

ABOUT ONE COMBINATORICAL LOGICAL TYPE PROBLEM

It is considered a problem to find subset with certain properties of n-elements set using minimal number of steps. Some results of solved problems are proposed.

Получено 15.04.2011