ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 517.977

Я.И. БИГУН, И.Ю. КРИВОНОС, К.А. ЧИКРИЙ, А.М. ТКАЧИК

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Для квазилинейной динамической игры, описываемой системой с импульсными воздействиями, получены достаточные условия сближения с цилиндрическим множеством за некоторое гарантированное время. При этом применена техника метода разрешающих функций, основанного на использовании специальных многозначных отображений и их селекторов. Моменты импульсных воздействий и величины скачков предполагаются заданными.

Введение. Процессы с импульсными воздействиями, в том числе системы с толчками, ударами исследованы в монографиях [1–4], где содержится обширная библиография по этому поводу. Игровые задачи для таких процессов исследованы в [5], где системы с толчками изучаются с помощью метода разрешающих функций [6, 7]. Эти исследования продолжаются в данной работе, однако в формализации импульсных воздействий, предложенной в [1], не использующей δ- функции Дирака.

Рассматривается конфликтно управляемый процесс

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t,u,v),\ z \in R^n,$$

$$t \ge t_0 \ge 0,\ z(t_0) = z_0,\ u \in U(t),\ v \in V(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ – матричная функция с суммируемыми на любом конечном интервале элементами; R^n – конечномерное евклидово пространство. Области управления игроков $U(t)$ и $V(t)$ являются измеримыми компактнозначными отображениями. Блок управления – функция $\varphi(t,u,v)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. она непрерывна по совокупности u и v и измерима по t. Кроме того, будем предполагать, что имеет место неравенство

$$\|\varphi(t,u,v)\| \le c(t)\ \ \forall\, u \in U(t),\ v \in V(t),$$

$$t_0 \le t < +\infty, \quad (2)$$

где $c(t)$ – суммируемая на любом конечном интервале скалярная функция.

При этом процесс (1) является импульсным [1, 2], т.е. траектория системы (1) имеет разрывы первого рода в заданных точках τ_i, $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_i < \tau_{i+1} < ... < +\infty$, последовательность которых не имеет конечных точек сгущения. Величина скачка в момент τ_i имеет вид

$$\Delta z\Big|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i) = B_i z_i + a_i\,,\ i = 1, 2, ...\,, \tag{3}$$

где B_i – постоянные матрицы, $z_i = z(\tau_i)$, а a_i – заданные векторы из R^n. Таким образом, траектория $z(t)$ в момент скачка непрерывна слева.

Кроме конфликтно управляемого процесса (1)–(3) с импульсными воздействиями задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t)\,,\ t_0 \le t < +\infty\,, \tag{4}$$

где M_0 – линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ – измеримое компактнозначное отображение, принимающее значения из ортогонального дополнения L к M_0 в пространстве R^n.

Цель первого игрока (u) – воздействуя на процесс (1)–(3) с помощью измеримого селектора $u(t)$ отображения $U(t)$, вывести его траекторию на множество (4) за кратчайшее время при любом противодействии второго игрока (v) в виде измеримого селектора $v(t)$ отображения $V(t)$.

В данной работе игровая задача рассматривается с позиций первого игрока, даются достаточные условия завершения сближения за некоторое гарантированное время в классе квазистратегий, т.е.

$$u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))\,,\ v_t(\cdot) = \{v(s) \in V(s), s \in [t_0, t]\}\,. \tag{5}$$

Разумеется, по аналогии с работой [3] могут быть получены условия завершения игры (1)–(3) с помощью контруправлений $u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t))$ при некоторых дополнительных предположениях.

Прежде чем излагать схему метода разрешающих функций (МРФ) [6, 7] для решения игровой задачи (1)–(3), приведем некоторые вспомогательные факты из теории импульсных систем [1, 2]. Другие модели, в том числе с толчками, исследованы в [3–5].

Если игроками выбраны допустимые управления $u(\tau)$ и $v(\tau)$, то решение системы (1)–(3) имеет вид (аналог формулы Коши)

$$z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \Phi(t,\tau_i)a_i\,, \tag{6}$$

где

$$\Phi(t,t_0) = \Omega(t, \tau_{j+k})(E + B_{j+k})\prod_{\nu=k}^{1}\Omega(\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1})\cdot(E + B_{j+\nu-1})\Omega(\tau_j, t_0)\,,$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1},$$

$$\Phi(t,\tau) = \Omega(t,\tau_{j+k}) \prod_{\nu=k}^{s+1} (E + B_{j+\nu}) \Omega(\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1})\,(E + B_{j+s}) \cdot \Omega(\tau_{j+s}, \tau), \qquad (7)$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j \le \tau_{j+s-1} < \tau \le \tau_{j+s} < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Здесь $\Omega(t,\tau)$ – матрицант [9] однородной системы (1).

Обозначим π ортопроектор, действующий из R^n в L, и рассмотрим многозначные отображения

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t,u,v) : u \in U(t)\}, \ t \ge t_0, \ v \in V(t),$$

$$W(t,\tau,v) = \pi\Phi(t,\tau)\varphi(\tau, U(\tau), v), \ W(t,\tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t,\tau,v), \ t \ge \tau \ge t_0,$$

где $\Phi(t,\tau)$ дается выражением (7).

Сформулируем одно из достаточных условий разрешимости задачи сближения.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t,\tau)$ принимает непустые значения для $t_0 \le \tau \le t < +\infty$.

Поскольку отображение $W(t,\tau)$ является замкнутозначным и измеримым по τ, то согласно теореме измеримого выбора в нем существует хотя бы один измеримый по τ селектор [8]. Зафиксируем его и обозначим $\gamma(t,\tau)$. Введем функцию

$$\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t,\cdot)) = \pi\Phi(t,t_0) z_0 + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \pi\Phi(t,\tau_i) a_i + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)\, d\tau,$$

а с ее помощью – многозначное отображение

$$A(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0 : [W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] \cap \alpha[M(t) - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t,\cdot))]\} \ne \varnothing,$$

$$v \in V(t), \ t \ge \tau \ge t_0.$$

Его опорную функцию в направлении +1 называют разрешающей [5, 7], она обладает свойством суперпозиционной измеримости по v, что позволяет ввести множество

$$T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge t_0 : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \int_{t_0}^{t} \alpha(t,\tau,v(\tau))\, d\tau \ge 1 \right\},$$

где Ω_V – совокупность измеримых селекторов отображения $V(t)$.

Теорема. Пусть для конфликтно управляемого процесса с импульсными воздействиями (1)–(3) выполнено условие Понтрягина и $M(t) = \mathrm{co}M(t)$, $t \ge t_0$.

Тогда, если для заданного начального состояния (t_0, z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, многозначного отображения

$W(t,\tau)$, что $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$ и $T \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$, то траектория процесса может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, – произвольная измеримая функция, а $\gamma(T,\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, – упомянутый измеримый селектор многозначного отображения $W(T,\tau)$, которое принимает непустые значения в силу условия Понтрягина.

Рассмотрим случай $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot)) \notin M(T)$. Для этого введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha(T,\tau,v(\tau))d\tau, \ t \in [t_0, T],$$

где $v(\tau)$ – зафиксированное вначале управление второго игрока. В рассматриваемом случае функция $\alpha(T,\tau,v(\tau))$ принимает конечные значения, она измерима в силу суперпозиционной измеримости по v и интеграл имеет смысл. Функция $h(t)$ абсолютно непрерывна на интервале $[t_0, T]$ как функция верхнего предела интеграла, а значит непрерывна. Она не возрастает, поскольку по построению функция $\alpha(T,\tau,v)$ неотрицательна и, соответственно, интеграл как функция верхнего предела является функцией неубывающей. Кроме того, $h(t_0) = 1$, а поскольку по определению $h(T) \le 0$, то из теоремы Коши о непрерывных функциях вытекает, что существует такой момент времени t_*, $t_* \in (t_0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Очевидно, что t_* зависит от $v(\cdot)$.

Промежутки времени $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T]$ в дальнейшем будем называть активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначное отображение

$$U(\tau,v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in$$
$$\in \alpha(T,\tau,v)[M(T) - \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))]\}. \qquad (8)$$

В силу свойств разрешающей функции $\alpha(T,\tau,v)$, ее $L \times B$- измеримости [7], и условий, наложенных на параметры конфликтно управляемого процесса (1)–(3), из теоремы об обратном образе [8] вытекает, что отображение $U(\tau,v)$ является $L \times B$- измеримым при $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Согласно теореме измеримого выбора существует хотя бы один $L \times B$- измеримый селектор $u(\tau,v)$ отображения $U(\tau,v)$. Он является суперпозиционно измеримой функцией, следовательно, $u(\tau)=u(\tau,v(\tau))$ – измеримая функция. Управление первого игрока на активном промежутке положим равным $u(\tau)$, $\tau\in[t_0,t_*)$.

Рассмотрим пассивный участок времени $[t_*,T]$. Положим в формуле (8) разрешающую функцию $\alpha(T,\tau,v)\equiv 0$. Получим многозначное отображение

$$U_0(\tau,v)=\{u\in U(\tau):\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)=0\}$$

Как и в предыдущем случае, отображение $U_0(\tau,v)$ является компактнозначным и $L\times B$ - измеримым. Поэтому в нем существует $L\times B$ - измеримый селектор $u_0(\tau,v)$. Управление первого игрока на пассивном участке выберем равным $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*,T]$.

В случае $\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))\in M(T)$ управление первого игрока на всем промежутке $[t_0,T]$ выберем в виде $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau))$, где $u_0(\tau,v)$ – $L\times B$ - измеримый селектор многозначного отображения $U_0(\tau,v)$.

Покажем, что при выборе управлений первым игроком по указанным правилам траектория процесса (1)–(3) будет приведена на терминальное множество $M_0+M(t)$ в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

В случае $\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))\overline{\in} M(T)$ с учетом формулы Коши

$$\pi z(T)=\pi\Phi(T,t_0)+\int_{t_0}^{T}\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u(\tau)v(\tau))d\tau+\sum_{t_0<\tau_i<t}\pi\Phi(T,\tau_i)a_i$$

и законов выбора управлений первым игроком имеем включение

$$\pi z(T)\in\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))\left[1-\int_{t_0}^{t_*}\alpha(T,\tau,v(\tau))d\tau\right]+\int_{t_0}^{t_*}\alpha(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau. \quad (9)$$

Поскольку $M(t)=\mathrm{co}M(t)$, а $\alpha(T,\tau,v(\tau))$ по построению неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $\int_{t_0}^{t_*}\alpha(T,\tau,v(\tau))d\tau=1$, то

$$\int_{t_0}^{t_*}\alpha(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau=M(T).$$

Учитывая этот факт, из включения (9) немедленно получим $\pi z(T)\in M(T)$, что эквивалентно включению $z(T)\in M^*(T)$.

В случае $\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))\in M(T)$ из формулы Коши с учетом закона выбора управления получим

$$\pi z(T)=\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))\in M(T).$$

Теорема доказана.

Заключение. Предложенная схема метода позволяет решать задачи о сближении для систем с разрывными траекториями различной природы на основе конструктивного метода разрешающих функций. Широкий спектр игровых задач [6] может быть исследован с помощью единого приема, позволяющего находить гарантированное время сближения, а также строить соответствующие управления.

Я.І. Бігун, І.Ю. Кривонос, К.А. Чикрій, О.М. Ткачик

ПРО ІГРОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Для квазілінійної гри, що описується системою з імпульсною дією, отримані достатні умови зближення з циліндричною множиною за деякий гарантований час. При цьому застосована техніка методу розв'язуючих функцій, що базується на використанні спеціальних багатозначних відображень та їх селекторів. Моменти імпульсної дії та величини скачків вважаються заданими.

Y.J. Bigun, I.Yu. Krivonos, K.A. Chikrii, A.V. Tkachik

ON GAME PROBLEM FOR QUASILINEAR IMPULSE SYSTEM

The paper investigates the dynamic game described by a system subject to impulse effect at certain instants of time. Conditions, providing for its trajectory in guaranteed time to approach a cylindrical set are obtained. In so doing, the technique of the method of resolving functions based on special set-valued mappings is employed.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Петришин Р.І.,Сопронюк Т.М.* Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією. – Чернівці: Рута, 2010. –200 с.
3. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
4. *Халанай Ф., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971 – 264 с.
5. *Кивонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А.* Динамические игры с разрывными траекториями. – Киев: Наук. думка, 2005. – 220 с.
6. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
7. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – **271**. – С. 76–92.
8. *Aubin J.-P., Frankowska He.* Set-Valued Analysis. – Birkhauser: Boston-Basel-Berlin, 1990. – 461 p.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Получено 18.02.2011