УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА, Е.А. ДВЕРНАЯ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Рассматривается экстремальная задача оптимизации на комбинаторной конфигурации перестановок при условии многокритериальности, анализируется метод решения таких задач с применением теории графов, учитывая свойства и структуру множества перестановок. Описывается подход решения таких задач на основе теории графов, который использует координатный метод решения в предложенном модифицированном подходе.

Введение. Задачи комбинаторной оптимизации возникают при исследовании многих теоретических и прикладных проблем [1–8]. Для решения таких задач существует довольно много методов, в том числе и методы с применением теории графов [2, 3]. С помощью теории графов хорошо описываются многие типы комбинаторных задач. При этом графические представления являются не просто иллюстрациями, но и позволяют получать новые подходы и методы к решению таких задач. Данная работа – продолжение исследований в области комбинаторной и многокритериальной оптимизации [2–6, 9].

1. Постановка задачи. В общем случае оптимизационную задачу можно представить в виде

$$< F, X, D, extr >, \qquad (1)$$

где $F : X \to R^1$ – заданная целевая функция, R^1 – числовая прямая, X – пространство решений, подмножество $D \subseteq X$ допустимых вариантов решения задачи согласно условиям ограничений задачи, $extr \in \{\min, \max\}$ – направление оптимизации.

Тогда задача формулируется следующим образом: найти такое $x^* \in D \subseteq X$, что

$$x^* = \arg \underset{x \in D \subseteq X}{extr} F(x). \qquad (2)$$

Даная экстремальная задача будет комбинаторной при условии, что пространство решений X определяется как некая комбинаторная конфигурация.

Даная экстремальная задача будет комбинаторной при условии, что пространство решений X определяется как некая комбинаторная конфигурация.

Задача будет многокритериальной, если критерий оптимальности F будет векторным, т. е. $F(f_1, f_2,.., f_n)$. При выполнении указанных условий задача (2) будет экстремальной комбинаторной задачей при условии многокритериальности.

Впрочем, для решения задачу оптимизации нескольких критериев (векторную) можно привести методом свертывания критериев к однокритериальной. Поэтому, постановка задачи состоит в поиске экстремальных значений функции на определенной комбинаторной конфигурации при дополнительных ограничениях. Следует отметить, что определение экстремального значения функции при отсутствии дополнительных ограничений является достаточно легкой задачей, поскольку как максимальное, так и минимальное значение можно найти, упорядочив коэффициенты по возрастанию и определить значение функции в максимальной или минимальной точке конфигурации [7].

В работе рассматривается модифицированный подход к решению следующей задачи: пусть задана векторная функция $F(f_1, f_2,.., f_n)$, где $f_i =< c_i, x_i > \to extr, i \in N_n$ на комбинаторной конфигурации $X = \{x\}$ и заданы дополнительные ограничения $A_{ij} x_j \le b_j$.

Сформулируем задачу следующим образом: найти элемент (или элементы) конфигурации, для которого функция достигает экстремального (максимального, минимального) значения и при этом выполняются дополнительные условия задачи (ограничения).

Следует отметить отличие предлагаемого подхода от рассматриваемого ранее, который основан на симплес-методе. Оно состоит в том, что вначале проводится поиск точек комбинаторной конфигурации, отвечающих дополнительным ограничениям, а затем среди множества этих отобранных точек находим тот элемент конфигурации, в котором достигается экстремальное значение функции [2, 3]. В предложенном ранее подходе находились решения, для которых достигался экстремум функции, и выполнялись условия дополнительных ограничений, а потом проверялась принадлежность найденного решения рассматриваемой комбинаторной конфигурации.

Координатный метод локализации значения линейной функции, модифицированный для нахождения точек, удовлетворяющих дополнительным ограничениям задачи, позволяет ограничить число рассматриваемых точек [2, 3]. Этот подход базируется на свойствах точек, которые определяют элементы комбинаторных конфигураций, разложенных на подграфы в соответствии с выбранным типом вершин и представленных в виде схемы подграфа [3], когда элементы упорядочены, и значение функции на определенном подграфе находится между значениями в крайних вершинах схемы. Граф – это сеть, где истоком является верхняя левая, а стоком – нижняя правая вершины.

Для использования координатного метода необходимо определить возможные типы вершин, по которым раскладывается граф. Возможность такого разложения обусловлена иерархическим построением графа, т. е. подграф меньшей размерности – составляющая часть всех графов большей размерности.

Продолжая исследования и развивая результаты [2 – 6], в работе предлагаются алгоритмы решения задач, основанные на координатном методе.

2. Построение алгоритма модифицированного координатного метода решения поставленной задачи

Данный алгоритм предназначен для решения экстремальных задач на комбинаторных множествах при наличии условия многокритериальности. В качестве примера построим алгоритм для множества перестановок. Как упоминалось выше, основной подход к решению многокритериальных задач состоит в способе приведения векторного критерия к скалярному виду. В предложенном алгоритме он состоит в подборе весовых коэффициентов каждого критерия оптимальности с помощью формулы

$$a_i^k = \frac{\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is}}{\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}}, \; i \in N_n. \tag{3}$$

Таким образом задача преобразуется в однокритериальную.

Заметим, что преимущество координатного метода состоит в том, что отпадает необходимость непосредственно находить значение функции путем подстановки элементов. Это возможно с помощью нахождения разницы между значениями в предыдущей и последующей вершинах, а это сокращает количество необходимых операций. Итак, перейдем к непосредственному рассмотрению алгоритма.

Алгоритм модифицированного координатного метода решения экстремальных комбинаторных задач при условии многокритериальности

1. Ввести коэффициенты целевых функций, дополнительных ограничений задачи, элементы множества, на котором строится комбинаторная конфигурация перестановок.

2. Преобразовать векторный критерий в линейную функцию $f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i^k f_i \to extr$, где весовые коэффициенты нового критерия оптимальности рассчитываются по формуле (2).

3. Для каждого из k ограничений найти соответствующие ему точки конфигурации перестановок, используя подпрограмму (модифицированный координатный метод).

Алгоритм подпрограммы модифицированного координатного метода

Пункт 1. Задать начальные значения переменным: $t = 1$, $k = 4$, $i = 6$.

Пункт 2. Зафиксировать тип вершины $v_t = (i_1, i_2, i_3)$, где $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1, 2, 3\}$. Номер подграфа i.

Пункт 3. Определить значения следующим образом: $x_s = i$,

$$x_{s-1} = \max\{N_s \setminus x_s\},\ x_{s-2} = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1})\},\ \ldots,$$
$$x_4 = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_5)\}.$$

Числа $\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_4)\}$ упорядочить по возрастанию $j_1 < j_2 < j_3$. Тогда $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, x_3 = j_{i_3}$. Это и будет код главной вершины, которую обозначим p_1. Отметим, что значение функции-ограничения в этой вершине для заданного типа вершины и зафиксированной координаты будет максимальным для построенной сети.

Пункт 4. Вычислить значение функции в коде главной вершины $f(p_1)$.

Пункт 5. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > ... > j_1$. Выполнить развертывание графа в направлении координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин $p_2, p_3, .., p_k$. Эти коды вершин являются кодами узлов верхней линии схемы.

Пункт 6. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты: $f(p_n) = f(p_{n-1}) - \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ – номер места числа j_λ в коде перестановки p_{n-1}.

Пункт 7. Проверить выполнение следующих условий:

а) если $f(p_m) \geq y^*$ (искомые значения могут присутствовать в построенном подграфе), то включаем m-ую перестановку в последующий поиск. Перейти к пункту 8 для последующего рассмотрения;

б) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1 \leq 1$ (искомые значения отсутствуют в построенном подграфе, но не все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин были рассмотрены), то перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$ – перейти к пункту 2;

в) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1=0$ (искомые значения отсутствуют в построенном подграфе, и все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин были рассмотрены), то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1}. Перейти к пункту 7 г;

г) если $t+1 \le 6$ (не все типы вершин были рассмотрены) перейти к пункту 2, иначе (для всех шести типов вершин уже были построены подграфы) – завершить роботу алгоритма для данного ограничения.

Пункт 8. Увеличить k на единицу. Если $k < s$, то перейти к пункту 9, иначе перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$ – перейти к пункту 2. Если $i-1=0$, то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1} при условии, что $t+1 \le 6$ (перейти к пункту 2), иначе – завершить роботу алгоритма для данного ограничения.

Пункт 9. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$; $j_k > j_{k-1} >, ..., > j_1$. Выполнить разворачивание графа вдоль координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин $q_2, q_3, .., q_k$.

Пункт 10. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты: $f(q_n) = f(q_{n-1}) - \delta_{n-1}$, $\delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ – номер места числа j_λ в коде перестановки q_{n-1}.

Пункт 11. Если $f(q_n) > y^* \forall n \in N_k$, то перейти к пункту 8. Если $f(q_n) \le y^*$, то запомнить код вершины q_n. Перейти к разворачиванию нового кода – к пункту 8.

4. Получить k множеств $D_i \subset X$, где $i \in N_k$.

5. Найти пересечение $D^* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_k$.

6. Вычислить значение функции в точках $x \in D^*$ и сравнить их, выбрав соответствующее экстремальное значение (максимум или минимум).

7. Найти значение функций, составляющих векторный критерий. Завершить работу алгоритма.

Исследованы сложные векторные задачи на комбинаторной конфигурации перестановок. Предложен модифицированный подход к решению сформулированных задач на основе координатного метода, сформулирован алгоритм решения для векторной функции на комбинаторной конфигурации перестановок, проведены численные эксперименты. Модифицированный подход имеет практическую значимость и представляет интерес в дальнейшем для построения и развития структурированного метода для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных сложных ограничений.

Заключение. Дальнейшее развитие работы будет направлено на реализацию и адаптацию сформулированных алгоритмов, на разработку новых методов решения комбинаторных задач с учетом других комбинаторных множеств.

Л.М. Колєчкіна, О.А. Двірна

МОДИФІКОВАНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

Розглядається екстремальна задача оптимізації на комбінаторній конфігурації перестановок за умови багатокритеріальності, аналізується метод розв'язування таких задач із застосуванням теорії графів, враховуючи властивості та структуру множини перестановок. Запропонований підхід розв'язування таких задач на основі теорії графів, описується підпрограма методу пошуку точок конфігурації, яка використовує координатний метод розв'язування у запропонованому модифікованому підході. Дана підпрограма знаходить точки, що задовольняють додатковим обмеженням задачі. Обґрунтовується побудова послідовності значень функції-обмеження, розкладання точок перестановок по підграфам графа згідно координатного методу на прикладі числового експерименту.

L.N. Kolechkina, E.A. Dvernaya

THE MODIFY APPROACH TO THE SOLVING OF AN EXTREMAL PROBLEMS ON COMBINATORIAL CONFIGURATIONS WITH MULTICRITERION CONDITION

Combinatorial optimization problem in combinatorial configuration permutations with additional restrictions is considered. The method of solving such problems by using graph theory, taking into account the properties and structure of the set of permutations is analyzed. Subprogram of the method of searching configuration's points that uses the coordinate method for solving the proposed modified approach is described. This subprogram searches the point of satisfying the additional constraints of the task. Building a sequence of functions-limit's values, decomposition points of permutations on subgraphs polyhedra according to the coordinate method with an example of numerical experiment are justified.

1. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 287 с.
2. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Монографія. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 362 с.
3. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 31–41.
4. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагирна А.Н.* Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 2. – С. 88–99.
5. *Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М.* Розв'язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок // Доповіді НАНУ. – 2010. – № 6. – С. 41–48.
6. *Колечкина Л.Н., Родионова Е.А.* Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 152–160.
7. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.
8. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
9. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 3–8.

Получено 11.03.2012