Теорія оптимальних рішень

УДК 517.977

Г.Ц. ЧИКРИЙ

О РАСТЯЖЕНИИ ВРЕМЕНИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

На основе принципа растяжения времени исследуется линейная дифференциальная игра преследования с интегральными ограничениями. Выведены достаточные условия завершения игры за конечное время. Приведен модельный пример.

Первый прямой метод Понтрягина [1] был изначально создан для решения линейных дифференциальных игр преследования с геометрическими ограничениями на управления. На его основе М.С. Никольским была разработан метод преследования для игр с интегральными ограничениями [2]. Позднее было предложено обобщение первого прямого метода, основанное на использовании функции растяжения времени [3], которое впоследствии была перенесено на случай интегральных ограничений [4]. Идея работы [2], а впоследствии и [4] состоит в предположении о факторизации, в котором в качестве фактора (множителя) выступает некоторая матрица-функция. Обоснование модификации [3], ее развитие и результаты ее применения в оригинальных модельных задачах представлены в [5-7], Во всех этих примерах упомянутое условие факторизации выполняется в более простом виде, а именно, в роли фактора выступает функция. Это послужило толчком для выведения более простых, легко проверяемых достаточных условий завершения линейной дифференциальной игры преследования с интегральными ограничениями, даже при более слабых предположениях относительно функции растяжения времени. Приведено решение иллюстративного примера мягкого сближения разнотипных объектов при таких ограничениях.

Пусть движение конфликтно-управляемого объекта описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - C\upsilon, \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $u \in R^m$, $\upsilon \in R^l$; A, B и C - матрицы порядка $n \times n$, $m \times n$ и $l \times n$, соответственно. Преследователь с помощью выбора своего управления $u(t)$ стремится вывести в некоторый конечный момент времени траекторию $z(t)$ на линейное подпространство M, $M \subset R^n$, несмотря на противодействие убегающего, распоряжающегося управлением $\upsilon(t)$. При этом участникам игры разрешается выбирать свои текущие управления таким образом, чтобы их реализации во времени были измеримыми функциями,, удовлетворяющими ограничениям

$$\int_0^\infty (u(\theta), u(\theta))d\theta \le \rho^2, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty (\upsilon(\theta), \upsilon(\theta))d\theta \le \sigma^2, \tag{3}$$

где $(\cdot,\cdot)$ это векторное скалярное произведение, $\rho > 0$, $\sigma > 0$.

Обозначим π матрицу проектирования из R^n на ортогональное дополнение к M в R^n. Тогда включение $\pi z(t) \in M$ равносильно окончанию игры.

Условие 1 (факторизации с растяжением). Существуют монотонно возрастающая, полунепрерывная сверху функция $I(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $I(0) = 0$, $I(t) \ge t$, $t > 0$, имеющая не более чем счетное число разрывов и непрерывно дифференцируемая в области своей непрерывности, и некоторая функция $r(t)$, $t \in [0, +\infty)$, такие, что

$$\pi e^{I(t)A} C = r(t) \pi e^{tA} B\,.$$

Функции $I(t)$ и $r(t)$ будем называть функцией растяжения времени и коэффициентом факторизации, соответственно.

Условие 2. $\sup\limits_{t \in [0, +\infty)} \left(\dot{I}(t) r^2(t)\right) = k^2$, $k > 0$.

Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$W(t) = \left\{ \int_0^t \pi e^{(t-\theta)A} B w(\theta) d\theta, \int_0^t (w(\theta), w(\theta)) d\theta \le (\rho - k\sigma)^2 \right\}. \tag{4}$$

Теорема. Пусть выполнены условия 1 и 2 и при некотором $t_1 > 0$ имеет место включение

$$-\pi e^{I(t_1)A} z_0 \in W(t_1), \tag{5}$$

Тогда из положения z_0 игра преследования может быть завершена ровно за время $I(t_1)$.

Доказательство. В силу теоремы Филиппова-Кастена об измеримом выборе из включения (5) следует существование измеримого селектора $\omega(t)$ многозначного отображения $W(t)$, такого, что

$$-\pi e^{I(t_1)A} z_0 = \int_0^{t_1} e^{(t_1-\theta)A} B\omega(\theta)d\theta, \tag{6}$$

причем

$$\int_0^t (\omega(\theta), \omega(\theta))d\theta \le (\rho - k\sigma)^2. \tag{7}$$

Опишем управление преследователя, приводящее к цели в конечный момент времени $I(t_1)$. На начальном отрезке времени $[0, \tau_0)$, где $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, положим его тождественно равным нулю. В каждый текущий момент времени $\tau_0 + t$, $t \in [0, t_1)$, управление преследователя будем строить согласно формуле

$$u(\tau_0 + t) = r(t_1 - t)\dot{I}(t_1 - t)v(\tau_0 + t_1 - I(t_1 - t)) + \omega(t). \tag{8}$$

Покажем, что это управление является допустимым, т.е. удовлетворяет (2).
В силу неравенства Минковского имеем

$$\int_0^{t_1} \big(r(t_1-\theta)\dot{I}(t_1-\theta)v(I(t_1)-I(t_1-\theta)) + \omega(t_1-\theta), r(t_1-\theta)\dot{I}(t_1-\theta)v(I(t_1)-I(t_1-\theta)) + \omega(t_1-\theta)\big)d\theta$$

$$\le \left(\left(\int_0^{t_1} r^2(t_1-\theta)\big(\dot{I}(t_1-\theta)\big)^2 \big(v(I(t_1)-I(t_1-\theta)), v(I(t_1)-I(t_1-\theta))\big)d\theta \right)^{1/2} + \left(\int_0^{t_1} (\omega(\theta), \omega(\theta))d\theta \right)^{1/2} \right)^2.$$

(9)

Из формулы $\int_0^t \big(v(I(t)-I(t-\theta)), v(I(t)-I(t-\theta))\big)d\theta = \int_0^{I(t)} (\upsilon(\theta), \upsilon(\theta))d\theta$

и условия (3) получим

$$\sup_{\int_0^\infty (v(\theta), v(\theta)) \le \sigma^2} \int_0^t \big(r(\theta)\dot{I}(\theta)\upsilon(I(t)-I(\theta)), r(\theta)\dot{I}(\theta)\upsilon(I(t)-I(\theta))\big)d\theta \le \sigma^2 \sup_{\theta \in [0,+\infty)} \big(\dot{I}(\theta)r^2(\theta)\big).$$

Ввиду этой оценки, неравенства (7) и условия 2 из формулы (9) следует требуемое неравенство: $\int_0^{t_1}(u(\tau_0+\theta),u(\tau_0+\theta))d\theta \le \rho^2$.

Как видно из формулы (8), в каждый текущий момент времени $\tau_0+t,\ t\in[0,t_1)$, преследователь строит свое управление по управлению убегающего в момент $\tau_0+t-(I(t_1)-I(t_1-t))$, как если бы информация об управлении убегающего поступала к нему с запаздыванием во времени $\tau(\tau_0+t)=I(t_1)-I(t_1-t)$.

Заметим, что в момент окончания игры $I(t_1)=\tau_0+t_1$ информация становится полной: $\tau(I(t_1))=0$. Согласно теоремы 2 [5] игра преследования с динамикой (1), терминальным множеством M и запаздыванием информации $\tau(\tau_0+t)$ эквивалентна игре с полной информацией с тем же терминальным множеством и динамикой

$$\dot{\tilde{z}}(\tau_0+t)=A\tilde{z}(\tau_0+t)+u(\tau_0+t)-\dot{I}(t_1-t)e^{[I(t_1-t)-(t_1-t)]A}v(\tau_0+t_1-I(t_1-t)).$$

Решение этого уравнения согласно формуле Коши с учетом условия 1 имеет вид

$$\pi\tilde{z}(I(t_1))=\pi e^{I(t_1)A}z_0+$$
$$\int_0^{\tau_0}\pi e^{(I(t_1)-\theta)A}Bu(\theta)d\theta+\int_0^{t_1}\pi e^{(t_1-\theta)A}B\big(u(\tau_0+\theta)-r(t_1-\theta)\dot{I}(t_1-\theta)v(I(t_1)-I(t_1-t))\big)d\theta.$$

Принимая во внимание выбор управления преследователем (8) и равенство (6), получаем , что $\pi\tilde{z}(I(t_1))=0$, откуда следует утверждение теоремы.

Следует отметить, что условие факторизации с растяжением выполняется во всех модельных задачах о мягком сближении для систем второго порядка, рассмотренных автором в работах [5-7].

Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую задачу о мягком сближении разнотипных объектов [7] при интегральныя ограничениях на управления. Преследующий является инерционным объектом:

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}=\rho u;\ x\in R^n;\alpha,\rho>0;\ \|u\|\le 1.$$

Объект, уклоняющийся от встречи, совершает затухающие колебания:

$$\ddot{y}+2h\dot{y}+\gamma^2 y=\sigma v;\ y\in R^n;\sigma>0;\|v\|\le 1;\ h^2<\gamma^2.$$

Начальные условия: $x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0,\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}_0$.

Коэффициент факторизации в этом случае имеет вид $r(t)=e^{\alpha t/2}\dot{I}(t)$ [7].

Можно показать ,что, если параметы игры удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha \geq \frac{\gamma^2}{h}, \ \frac{\rho^2}{\alpha^4} \geq \frac{\sigma^2}{\gamma^4},$$

то при любых начальных условиях преследователь за конечное время может осуществить мягкое сближение с противником.

Г.Ц. Чикрій

ПРО РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

На основі принципу розтягування часу досліджується лінійна диференційна гра переслідування з інтегральними обмеженнями на керування. Одержано достатні умови завершення гри за скінченний час. Наведено модельний приклад.

G.Ts. Chikrii

ON TIME EXTENSION IN DIFFERENTIAL GAMES UNDER INTEGRAL CONSTRAINTS

The linear differential game of pursuit under integral constraints on controls is considered on the basis of the time extension principle. Sufficient conditions on the finite-time termination of the game are obtained. A model example is given.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
2. *Никольский М.*С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями ограничениями / Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР. – 1969. – вып 2. – С. 49-59.
3. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**. – № 3.– С. 520–523.
4. *Азимов А.Я.* Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. – 1974. – № 2. – С. 31-35.
5. *Чикрий Г.Ц.* Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 90–105.
6. *Чикрий Г.Ц.* Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5 – С. 5–12.
7. *Чикрий Г.Ц.* Об одной игровой задаче мягкой встречи двух разнотипных объектов // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – 2011. – № 10. – С. 31–37.

Получено 14.05.2012