УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОБРАТНОМ ОБРАЗЕ

Установлена $L \otimes B \otimes B$ -измеримость графиков специальных многозначных отображений, которые играют важную роль при построении управлений динамичными объектами на основе измеримого выбора и обеспечивают суперпозиционную L -измеримость в игровых задачах.

В математической теории управления и теории динамических игр [1, 2] при выборе управляющих воздействий часто используются принципы измеримого выбора, восходящие к классической теореме Филиппова о неявных функциях [3]. В игровых задачах в этом смысле ключевую роль играют специальные многозначные отображения [4, 5], обладающие, как показано в [6], свойством совокупной $L \otimes B$ -измеримости [7], а следовательно, суперпозиционной L -измеримости [7, 8], которая дает возможность строить допустимые управления, реализующие гарантированный результат [5]. В данной работе используется подход, базирующийся на методике, развитой в [7], для случая, когда не требуется замкнутости значения специальных многозначных отображений для существования соответствующих селекторов. Он позволяет обобщить результаты работ [7, 8], касающиеся теоремы об обратном образе. При этом, установлена $L \otimes B \otimes B$ -измеримость графиков специальных многозначных отображений, что с учетом теоремы Аумана [9], гарантирует без требования замкнутости значения многозначного отображения существование соответствующих $L \otimes B$ -измеримых селекторов.

Работа выполнена при поддержке ДФФД Украины. Проект Ф40.1/21

Для любого замкнутого множества Ω евклидового пространства R^k обозначим L – множество всех его измеримых по Лебегу подмножеств [6, 7] и пусть $\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^n\right)$ – σ-алгебра борелевских множеств пространства R^l. Обозначим $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$ σ-алгебру, порожденную произведением множеств $L\times B$, где $L\in\mathsf{L}$, $B\in\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, будем называть $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$-измеримыми (более точно $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$-измеримыми). Аналогично определяются $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\otimes\mathsf{B}$-измеримые множества.

Вектор-функцию $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathsf{R}^l\to\mathsf{R}^m$, будем называть $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$-измеримой, если для любого борелевского множества $B\in\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^m\right)$ его обратный образ $f^{-1}(B)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathsf{R}^l:\ f(\omega,x)\in B\right\}$ будет $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$-измеримым. Многозначное отображение $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathsf{R}^l\to 2^{\mathsf{R}^m}$, будем называть $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$-измеримым, если для любого открытого множества $A\subset\mathsf{R}^m$ его обратный образ $F^{-1}(A)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathsf{R}^l:\ F(\omega,x)\bigcap A\neq\varnothing\right\}$ будет $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)$-измеримым.

Каждому многозначному отображению $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathsf{R}^l\to 2^{\mathsf{R}^m}$, можно сопоставить его график $\operatorname{gr}F=\left\{(\omega,x,z)\in\Omega\times\mathsf{R}^l\times\mathsf{R}^m : z\in F(\omega,x)\right\}$.

Теорема 1. Пусть для многозначного отображения $F(\omega,x,y)$, $F:\ \Omega\times\mathsf{R}^l\times\mathsf{R}^n\to 2^{\mathsf{R}^m}$, его обратный образ $F^{-1}(B)$ для любого $B\in\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^m\right)$ $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^n\right)$-измерим, а графики многозначных отображений $H(\omega,x)$, $H:\Omega\times\mathsf{R}^l\to 2^{\mathsf{R}^n}$, $G(\omega,x), G:\Omega\times\mathsf{R}^l\to 2^{\mathsf{R}^m}$, $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^n\right)$-измерим и $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^m\right)$-измерим, соответственно.

Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega,x),\Phi:\ \Omega\times\mathsf{R}^l\to 2^{\mathsf{R}^m}$, $\Phi(\omega,x)=$ $=\left\{y\in\mathsf{R}^n:\ y\in H(\omega,x), F(\omega,x,y)\bigcap G(\omega,x)\neq\varnothing\right\}$ имеет $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^l\right)\otimes$ $\otimes\mathsf{B}\left(\mathsf{R}^n\right)$-измеримый график.

Доказательство. Определим многозначное отображение $\Gamma(\omega,x,y)$, $\Gamma:\Omega\times\mathsf{R}^l\times\mathsf{R}^n\to\Omega\times\mathsf{R}^l\times 2^{\mathsf{R}^m}$, $\Gamma(\omega,x,y)=(\omega,x,F(\omega,x,y))$.

Покажем, что имеет место соотношение

$$gr\Phi = grH \cap \Gamma^{-1}(grG). \tag{1}$$

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi(\omega, x)$, $\Psi : \Omega \times \mathrm{R}^l \to 2^{\mathrm{R}^n}$, $\Psi(\omega, x) = \{y \in \mathrm{R}^n : F(\omega, x, y) \cap G(\omega, x) \neq \varnothing\}$. Тогда поскольку $\Phi(\omega, x) = H(\omega, x) \cap \Psi(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathrm{R}^l$, то получаем

$$gr\Phi = grH \cap gr\Psi.$$

При этом, легко показать, что $gr\Psi = \Gamma^{-1}(grG)$.

Действительно, имеем

$$gr\Psi = \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n : \quad y \in \Psi(\omega, x)\} =$$

$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n : \quad F(\omega, x, y) \cap G(\omega, x) \neq \varnothing\} =$$

$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n : \quad \Gamma(\omega, x, y) \cap \mathrm{grG}(\omega, x) \neq \varnothing\} = \Gamma^{-1}(grG).$$

Для каждого множества $L \times B_1 \times B_2 \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^m)$ справедливо соотношение

$$\Gamma^{-1}(L \times B_1 \times B_2) =$$

$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n : \quad \Gamma(\omega, x, y) \cap (L \times B_1 \times B_2) \neq \varnothing\} =$$

$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n : \quad F(\omega, x, y) \cap B_2 \neq \varnothing\} \cap (L \times B_1 \times \mathrm{R}^n) =$$

$$= F^{-1}(B_2) \cap (L \times B_1 \times \mathrm{R}^n) \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n).$$

Последнее включение справедливо в силу того, что по условию для каждого борелевского множества $B \in \mathrm{B}(\mathrm{R}^m)$ множество $F^{-1}(B)$ $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$-измеримо. Поэтому для каждого множества $C \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^m)$ имеет место включение $\Gamma^{-1}(C) \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$.

Тогда с учетом соотношения (1) получаем

$$gr\Phi = grH \cap \Gamma^{-1}(\mathrm{gr}G) \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть вектор-функция $f(\omega, x, y)$, $f : \Omega \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$-измерима, а графики многозначных отображений $H(\omega, x), H : \Omega \times \mathrm{R}^l \to 2^{\mathrm{R}^n}$, $G(\omega, x), G : \Omega \times \mathrm{R}^l \to 2^{\mathrm{R}^m}$, $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$-измерим и $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^l) \otimes \mathrm{B}(\mathrm{R}^m)$-измерим, соответственно.

Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega,x), \Phi: \Omega\times\mathrm{R}^l \to 2^{\mathrm{R}^m}$, $\Phi(\omega,x) = \{y\in \mathrm{R}^n: y\in H(\omega,x),\ f(\omega,x,y)\in G(\omega,x)\}$ имеет $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$-измеримый график.

Заметим, что следствие 1 непосредственно следует из теоремы 1 и является обобщением теоремы об обратном образе [7, стр. 315] и теоремы 3 [8, стр. 346] на случай незамкнутости значений многозначных отображений.

Лемма 1. Пусть многозначное отображение $F(\omega,x)$, $F: \Omega\times\mathrm{R}^l \to 2^{\mathrm{R}^m}$, имеет открытые значения и для всякого $z\in \mathrm{R}^m$ множества $\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l : z\in F(\omega,x)\}$ $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримы. Тогда это многозначное отображение $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримо и для всякого $y\in\mathrm{R}^m$ скалярная функция $\rho(y,F(\omega,x)) = \inf\{\|y-z\| : z\in F(\omega,x)\}$ будет $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримой.

Доказательство. Пусть $B\subset\mathrm{R}^m$ произвольное открытое множество и D – счетное плотное множество в R^m. Тогда множество $F^{-1}(B)$ $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримо, так как имеем

$$F^{-1}(B) = \{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ F(\omega,x)\cap B\neq\varnothing\} =$$

$$= \{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ z\in F(\omega,x) \text{ для некоторого } z\in B\} =$$

$$= \{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ d\in F(\omega,x) \text{ для некоторого } d\in D\cap B\} =$$

$$= \bigcup_{d\in D\cap B}\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ d\in F(\omega,x)\}.$$

Обозначим $S(y,\alpha) = \{z\in\mathrm{R}^m:\ \rho(y,z)<\alpha\}$ открытый шар евклидового пространства R^m с центром в точке $y\in\mathrm{R}^m$ радиуса $\alpha>0$. Тогда для всякого $y\in\mathrm{R}^m$ скалярная функция $\rho(y,F(\omega,x))$ будет $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измеримой поскольку имеет место соотношение

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l:\ \rho(y,F(\omega,x))<\alpha\} = F^{-1}(S(y,\alpha)).$$

Далее, говоря о непрерывности вектор-функций и многозначных отображений, используем общепринятые определения [6, 7].

Вектор-функцию $f(\omega,x,y)$, $f:\Omega\times\mathrm{R}^l\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$, будем называть функцией Каратеодори, если для каждого $y\in\mathrm{R}^n$ функция $f(\cdot,\cdot,y)$ $\mathrm{L}\otimes\mathrm{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима и при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^l$ $f(\omega,x,\cdot)$ непрерывна. Аналогично, многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F:\Omega\times\mathrm{R}^l\times\mathrm{R}^n\to 2^{\mathrm{R}^m}$, будем называть отображением Каратеодори, если для каждого $y \in \mathsf{R}^n$ отображение $F(\cdot,\cdot,y)$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измеримо и при каждом $(\omega, x) \in \Omega \times \mathsf{R}^l$ $F(\omega, x, \cdot)$ непрерывно.

Лемма 2. Пусть многозначное отображение $F(\omega, x, y)$, $F : \Omega \times \times \mathsf{R}^l \times \mathsf{R}^n \to 2^{\mathsf{R}^m}$ имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори. Тогда отображение $F(\omega, x, y)$ будет $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l) \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^n)$-измеримым.

Доказательство. При каждом $(\omega, x) \in \Omega \times \mathsf{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega, x, \cdot)$ непрерывно и поэтому полунепрерывно сверху. Следовательно, для любого замкнутого множества $C \subset \mathsf{R}^m$ многозначное отображение $\Gamma(\omega, x)$, $\Gamma : \Omega \times \mathsf{R}^l \to 2^{\mathsf{R}^n}$, где $\Gamma(\omega, x) = \{y \in \mathsf{R}^n : F(\omega, x, y) \cap C \neq \varnothing\}$, имеет замкнутые значения. Покажем, что для всякого $y \in \mathsf{R}^n$ скалярная функция $\rho(y, \Gamma(\omega, x))$ будет $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измеримой.

Положим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma_\varepsilon(\omega, x) = \{y \in \mathsf{R}^n : F(\omega, x, y) \cap C_\varepsilon \neq \varnothing\},\ \Gamma_\varepsilon : \Omega \times \mathsf{R}^l \to \mathsf{R}^n,$$

где $C_\varepsilon = \{z \in \mathsf{R}^m : \rho(z, C) < \varepsilon\}$.

Все множества $\Gamma_\varepsilon(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathsf{R}^l$, открыты, поскольку многозначное отображение $F(\omega, x, \cdot)$ полунепрерывно снизу. При этом, для каждого $y \in \mathsf{R}^n$ множества $\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathsf{R}^l : y \in \Gamma_\varepsilon(\omega, x)\} = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathsf{R}^l : : F(\omega, x, y) \cap C_\varepsilon \neq \varnothing\}$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измеримы. Поэтому в силу леммы 1 функция $\rho(y, \Gamma_\varepsilon(\omega, x))$ при всех $y \in \mathsf{R}^n$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измерима.

Если теперь устремить ε к 0, то функция $\rho(y, \Gamma_\varepsilon(\omega, x))$ будет стремиться к функции $\rho(y, \Gamma(\omega, x))$ и, следовательно, при каждом $y \in \mathsf{R}^n$ функция $\rho(y, \Gamma(\omega, x))$ будет $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измеримой как предел последовательности $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l)$-измеримых функций.

В силу теоремы о характеризации [7, стр. 310] $gr\Gamma \in \mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l) \times \mathsf{B}(\mathsf{R}^n)$ и поэтому множество $F^{-1}(C)$ будет $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^l) \otimes \mathsf{B}(\mathsf{R}^n)$-измеримым, так как

$$F^{-1}(C) = \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathsf{R}^l \times \mathsf{R}^n : F(\omega, x, y) \cap C \neq \varnothing\} =$$
$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathsf{R}^l \times \mathsf{R}^n : y \in \Gamma(\omega, x)\} = gr\Gamma.$$

Опять, обратившись к теореме о характеризации, получим, что отображение $F(\omega, x, y)$ $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримо.

С помощью теоремы 1 с учетом леммы 2 можно доказать следующую теорему, которая является аналогом основной теоремы из работы [6, стр. 56].

Теорема 2. Пусть многозначное отображение $F(\omega, x, y)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\times \times\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори, а многозначные отображения $H(\omega, x), H:\Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $G(\omega, x)$, $G:\Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$ имеют замкнутые значения и $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримы. Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega, x), \Phi:\ \Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\Phi(\omega, x) = = \{y\in \mathbb{R}^n:\ y\in H(\omega, x),\quad F(\omega, x, y)\bigcap G(\omega, x)\neq\varnothing\}$ имеет закнутые значения и $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $\Psi(\omega, x)$, $\Psi:\ \Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\Psi(\omega, x) = \{y\in \mathbb{R}^n:\ F(\omega, x, y)\bigcap G(\omega, x)\neq\varnothing\}$. При каждом $(\omega, x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega, x, \cdot)$ полунепрерывно сверху и поэтому для каждого замкнутого множества $C\subset\mathbb{R}^m$ множество $\{y\in \mathbb{R}^n:\ F(\omega, x, y)\bigcap C\neq\varnothing\}$ замкнуто при всех $(\omega, x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$. Это значит, что $\Psi(\omega, x)$ – замкнутозначно и, следовательно, $\Phi(\omega, x) = = H(\omega, x)\bigcap\Psi(\omega, x)$ замкнутые значения при каждом $(\omega, x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$, так как $H(\omega, x)$ замкнутозначно по условию.

В силу леммы 2 отображение $F(\omega, x, y)$ будет $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым и по теореме о характеризации его обратный образ $F^{-1}(B)$ для любого $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измерим. Теорема о характеризации гарантирует, что графики многозначных отображений $H(\omega, x)$, $H:\Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $G(\omega, x), G:\Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измерим и $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-измерим, соответственно. Поэтому на основании теоремы 1 можно заключить, что многозначное отображение $\Phi(\omega, x)$, $\Phi:\ \Omega\times\mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримый график и с учетом теоремы о характеризации $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Й.С. Раппопорт

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ОБЕРНЕНИЙ ОБРАЗ

Встановлено $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ -вимірність графіків спеціальних багатозначних відображень, які відіграють важливу роль при побудові керувань динамічними об'єктами на основі теорем вимірного вибору та забезпечують суперпозиційну $\mathcal{L}$ -вимірність в ігрових задачах.

I.S. Rappoport

ONE GENERALIZATION OF THE INVERSE IMAGE THEOREM

The $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ -measurabiliti of the graphs of special set-valued maps, which play an important role in the construction of control over dynamic objects on the basis of the measurable choice theorems and ensure the superimposed $\mathcal{L}$ -measurability in gaming problems, is established.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
2. *Chikrii A.A. J.-P.* Conflict controlled processes // Mathematics and Its Applications. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 424 p.
3. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим. – 1959. – **2,** № 11. – С. 25–32.
4. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – **271.** – С. 76–92.
5. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А.* Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. № 5. – С. 129–144.
6. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* К теореме об обратном образе для $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$ -измеримых многозначных отображений // ДАН Украины. – 2011. – № 11. – С. 54–58.
7. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis // Mathematics and Its Applications. – Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
8. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
9. *Aumann R.J.* Measurable Utility and the Measurable Choice Theorem // Mathematics and Its Applications, La Decision, Actes Coll. Int/ du CNRS, Aix-tn Provence, 1967. – P. 15–26.

Получено 26.03.2012