УДК 517.977

А.А. БЕЛОУСОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

Рассматриваются игровые задачи преследования для линейных систем с общими выпуклыми интегральными ограничениями на управления. Формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Динамические системы с интегральными ограничениями на управление имеют важное прикладное значение. Изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями посвящено довольно много работ. Однако они сосредотачивались главным образом на одном типе интегральных ограничений – в виде интеграла от квадрата нормы функции-управления (в норме L_2). Но интерес представляют и более общие типы интегральных ограничений. Отметим статью М.С. Никольского [1], в которой игра обобщается на случай управления преследователя ограниченого интегралом N-функции от евклидовой нормы. В данной работе рассматривается дифференциальная игра с интегральным ограничением на управление преследователя, которое определяется выпуклым функционалом достаточно общего вида (конечным вместе с сопряженным на всем пространстве). Конечность сопряженного функционала (кофинитность [2]) позволяет ограничить рассмотрение измеримыми управлениями без привлечения импульсных воздействий и аппарата управлений-мер (обобщенных функций) как происходит, например, в случае нормы L_1 [3]. Работа развивает исследования [3-5].

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ДФФД-Ф40.1/021.

Динамика игры задается линейным дифференциаль-ным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ v \in \mathbb{R}^l. \qquad (1)$$

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int_0^\infty \varphi(u(\tau))\, d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \psi(v(\tau))\, d\tau \le 1. \qquad (2)$$

Эти управления будем называть допустимыми.

Функция φ, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой, конечной на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ и кофинитной [2]. Кофинитность означает, что конечной на всем $\mathbb{R}^m$ будет сопряженная к φ выпуклая функция

$$\varphi^*(u^*) = \sup_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ \left\langle u, u^* \right\rangle - \varphi(u) \right\}. \qquad (3)$$

Геометрически это эквивалентно тому, что надграфик выпуклой функции φ не содержит невертикальных лучей.

Функция ψ, $\psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, предполагается полунепрерывной сверху.

Напомним, что для выпуклых функций φ и φ^* конечность на всем пространстве влечет непрерывность этих функций [2].

Терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через π оператор проектирования из $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к M в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $v(t)$ существует допустимое управление преследователя $u(t)$, гарантирующее приведение решения уравнения (1) $z(t)$, соответствующего управлениям $(u(t), v(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $u(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию о реализовавшим-ся до этого момента управлении противника $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$.

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л.С. Понтрягина для дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Оно фиксирует некое преимущество преследующего игрока над убегающим и обеспечивает возможность решения задачи сближения.

Условие. Существует такое число λ, $0 \le \lambda < 1$, что для всех неотрицательных чисел t и c выполняется включение:

$$\pi e^{At} C\Psi(c) \subset \pi e^{At} B\Phi(\lambda c), \tag{4}$$

где $\Phi(c) = \{u \in \mathrm{R}^m : \varphi(u) \le c\}$ и $\Psi(c) = \{v \in \mathrm{R}^l : \psi(v) \le c\}$ – лебеговские множества функций φ и ψ в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это условие на параметры игры выполнено.

Зафиксируем начальную позицию z^0. Введем обозначения

$$f(t,\tau,v,\gamma) = -\gamma\pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv, \quad F(\tau,v,\gamma) = \pi e^{A\tau} B\Phi((1-\lambda)\gamma + \lambda\psi(v)), \tag{5}$$

$$\Omega(t,\tau,v) = \{\gamma \in \mathrm{R} : f(t,\tau,v,\gamma) \in F(\tau,v,\gamma)\}, \quad \gamma(t,\tau,v) = \sup\Omega(t,\tau,v), \tag{6}$$

где $(t,\tau,v,\gamma) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}$, $\mathrm{R}_+ = [0,\infty)$.

Исследуем свойства этих многозначных отображений и функций.

Лемма 1. Имеют место соотношения:

$$\gamma(t,\tau,v) \ge 0 \text{ для всех } (t,\tau,v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l;$$

$$\gamma(t,\tau,v) = +\infty \text{ при } \pi e^{At} z^0 = 0 \text{ для всех } (\tau,v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l;$$

$$\gamma(t,\tau,v) < \infty \text{ при } \pi e^{At} z^0 \ne 0 \text{ для любых } (\tau,v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l.$$

Доказательство. Первое и второе утверждения леммы следует непосредственно из условия (4), т.к. при всех $\gamma \ge 0$ имеем

$$\pi e^{A\tau} Cv \in \pi e^{A\tau} C\Psi(\psi(v)) \subset \pi e^{A\tau} B\Phi((1-\lambda)\gamma + \lambda\psi(v)).$$

Для доказательства третьего утверждения возьмем произвольное (сколь угодно большое) число K. Так как сопряженная функция (3) φ^* конечна на всем пространстве R^m, то число $r = \max\{\varphi^*(u^*) : u^* \in \mathrm{R}^m, \|u^*\| = K+1\}$ определено. Тогда для любого вектора $u \in \mathrm{R}^m$ такого, что $\|u\| \ge r$ имеем

$$\|u\| \ge r \ge \varphi^*((K+1)\frac{u}{\|u\|}) \ge (K+1)\|u\| - \varphi(u),$$

а значит $K\|u\| \le \varphi(u)$. Поэтому для всех чисел $\gamma \ge K \cdot r$ выполняется включение

$$\frac{\Phi(\gamma)}{\gamma} \subset \frac{1}{K} \cdot D, \quad D = \{u \in \mathrm{R}^m : \|u\| \le 1\}.$$

Это означает, что лебеговское множество $\Phi(\gamma)$ растет по γ асимптотически медленнее, чем линейно, что верно и для множества $F(\tau,v,\gamma)$ из (5). В то же время длина вектора $f(t,\tau,v,\gamma)$ из (5) асимптотически растёт линейно по γ. Значит, для достаточно больших чисел γ вектор $f(t,\tau,v,\gamma)$ находится вне множества $F(\tau,v,\gamma)$.

Лемма 2. Если $\gamma > 0$ и $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$, $(t, \tau, v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l$, то интервал $[0, \gamma] \subset \Omega(t, \tau, v)$.

Доказательство. По условиям леммы существует вектор $u \in \mathrm{R}^m$ такой, что $f(t, \tau, v, \gamma) = \pi e^{A\tau} Bu$ и $\varphi(u) \le (1 - \lambda)\gamma + \lambda\psi(v)$. Из условия (4) следует существование вектора $\bar{u} \in \mathrm{R}^m$ такого, что $f(t, \tau, v, 0) = \pi e^{A\tau} B\bar{u}$ и $\varphi(\bar{u}) \le \lambda\psi(v)$.

Возьмем любое число β, $0 \le \beta \le \gamma$, и положим $w = \dfrac{\beta}{\gamma} \cdot u + \left(1 - \dfrac{\beta}{\gamma}\right)\bar{u}$. Тогда

$$f(t, \tau, v, \beta) = \frac{\beta}{\gamma} \cdot f(t, \tau, v, \gamma) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \cdot f(t, \tau, v, 0) = \pi e^{A\tau} Bw,$$

$$\varphi(w) \le \frac{\beta}{\gamma}\varphi(u) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\varphi(\bar{u}) \le \frac{\beta}{\gamma}\left[(1 - \lambda)\gamma + \lambda\psi(v)\right] + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\lambda\psi(v) = (1 - \lambda)\beta + \lambda\psi(v).$$

Это означает, что $\beta \in \Omega(t, \tau, v)$.

Лемма 3. При $\pi e^{At} z^0 \ne 0$ верхняя грань в определении $\gamma(t, \tau, v)$ (6) достигается и функция $\gamma(t, \tau, v)$ будет полунепрерывной сверху по совокупности переменных $(t, \tau, v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l$.

Доказательство. Рассмотрим сначала выпуклозначное и компактозначное отображение $\Phi(c)$ из (4). Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $c \ge \min\{\varphi(u) : u \in \mathrm{R}^m\}$ рассмотрим границу выпуклого компакта $\Phi(c) + \varepsilon D$. Это будет компактное множество $\Gamma = \partial\{\Phi(c) + \varepsilon D\}$ в R^m. Значит, на нем достигается минимум $\eta = \min\{\varphi(u) : u \in \Gamma\}$. Тогда для всех $d \le \eta$ выполняется включение $\Phi(d) \subset \Phi(c) + \varepsilon D$, что доказывает полунепрерывность сверху $\Phi(c)$.

Учитывая полунепрерывность сверху функции $\psi(v)$, отсюда вытекает полунепрерывность сверху многозначного отображения $F(\tau, v, \gamma)$, $(t, \tau, v) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l$. Введем функцию расстояния $R(t, \tau, v, \gamma)$ между вектором $f(t, \tau, v, \gamma)$, который непрерывно зависит от параметров, и выпуклым компактом $F(\tau, v, \gamma)$. Эта функция является полунепрерывной снизу по совокупности переменных $(t, \tau, v, \gamma) \in \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^l \times \mathrm{R}_+$. Включение $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$ эквивалентно равенству $R(t, \tau, v, \gamma) = 0$.

Определение (6) означает, что существует последовательность чисел γ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таких, что $R(t, \tau, v, \gamma_i) = 0$ и $\gamma_i \to \gamma(t, \tau, v)$ при $i \to \infty$. Отсюда, учитывая полунепрерывность снизу, вытекает, что $R(t, \tau, v, \gamma(t, \tau, v)) \le 0$, т. е. верхняя грань в определении функции (6) достигается.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и любого вектора $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$ имеем $r = R(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\gamma} + \varepsilon) > 0$, где $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$. Из полунепрерывности снизу функции $R(\cdot)$ следует существование такой окрестности Δ точки $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$, что для всех $(t, \tau, v) \in \Delta$ выполняется неравенство $R(t, \tau, v, \bar{\gamma} + \varepsilon) > 0$, т. е. $\bar{\gamma} + \varepsilon \notin \Omega(t, \tau, v)$. Учитывая лемму 2, получаем $\gamma(t, \tau, v) \le \bar{\gamma} + \varepsilon$ для всех $(t, \tau, v) \in \Delta$, что и доказывает полунепрерывность сверху функции $\gamma()$.

Теорема. Полагаем, что выполнено условие (4) на параметры игры (1), (2). Предположим, что существует момент $T = T(z^0)$ такой, что либо $\pi e^{AT} z^0 = 0$, либо $\pi e^{AT} z^0 \ne 0$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\int_0^T \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) d\tau \ge 1. \qquad (7)$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. Проанализируем сначала случай $\pi e^{AT} z^0 \ne 0$.

Согласно лемме 3 разрешающая функция $\gamma(T, \tau, v)$ является измеримой по Борелю, поэтому измеримым по Борелю будет вектор $f(T, \tau, v, \gamma(T, \tau, v))$. Также полунепрерывным сверху, а значит и измеримым по Борелю, будет компактозначное отображение $G(\tau, v) = \Phi((1-\lambda)\gamma(T, \tau, v) + \lambda\psi(v))$, для которого выполняется включение

$$f(T, \tau, v, \gamma(T, \tau, v)) \in \pi e^{A\tau} B G(\tau, v), \quad (\tau, v) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}^l. \qquad (8)$$

Отметим, что функция $\pi e^{A\tau} B u$ является непрерывной по $(\tau, u) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}^m$.

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль – Нардзевского [6, 7] следует, что для включения (8) существует измеримый по Борелю по совокупности переменных $(\tau, v) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}^l$ селектор $w(\tau, v) \in G(\tau, v)$.

Из этой же теоремы можно сделать заключение, что существует измеримое по Борелю отображение $\tilde{w}(\tau, v) \in \Phi(\lambda\psi(v))$ для которого выполняется равенство $f(T, \tau, v, 0) = \pi e^{A\tau} B \tilde{w}(\tau, v)$ при всех $(\tau, v) \in \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}^l$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0, T]$ произвольное допустимое (2) управление $v(\tau)$. По предположению теоремы (7) существует момент $T^* = T^*(z^0, v(\cdot))$ такой, что

$$\int_0^{T^*} \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) d\tau = 1.$$

Тогда управление преследователя на интервале $[0,T^*]$ положим равным $u(\tau)=w(T-\tau,v(\tau))$, а далее $u(\tau)=\tilde{w}(T-\tau,v(\tau))$. Такой закон выбора управлений преследователя является (по существу) контруправлением с одним переключением. Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [7].

Аналогично доказательствам из [3-5] можно показать, что построенное таким образом управление преследователя удовле-творяет интегральному ограничению (2) и решение уравнения (1) попадет на терминальное множество в момент T. Таким же образом рассматривается случай $\pi e^{AT}z^0=0$.

О.А. Бєлоусов

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Розглядаються ігрові задачі переслідування для лінійних систем із загальними опуклими інтегральними обмеженнями на керування. Формулюється аналог умови Л.С. Понтрягіна, який дозволяє отримати достатні умови вирішення задачі за певний гарантований час.

A.A. Belousov

DIFFERENTIAL GAMES UNDER GENERAL INTEGRAL CONSTRAINS ON CONTROLS

Linear systems under general convex integral constraints on controls are discussed in this paper. Analog of Pontryagin's Condition is formulated. On its basis sufficient conditions of the game termination in a certain guaranteed time are obtained.

1. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 1972. – **8**, № 6. – С. 964–971.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
3. *Белоусов А.А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 3–9.
4. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 4. – С. 290–301.
5. *Белоусов А.А.* Метод разрешающих функций для дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2010. – С. 10–17.
6. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – . – 624 с.
7. *Kisielewicz M.* Differential Inclusions and Optimal Control // Mathematics and Its Applications. – Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – **44**. – 260 p.

Получено 03.05.2012