ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Розглядається нелінійна модель регресії з майже періодичною функцією та випадковим шумом за припущення, що шум є локальним функціоналом від гауссівського стаціонарного процесу із сильною залежністю. Досліджено періодограмні оцінки невідомих параметрів функції в заданій моделі та доведено їх консистентність.

УДК 519.21

Г.Д. БІЛА

КОНЗИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У МОДЕЛЯХ ІЗ СИЛЬНОЗАЛЕЖНИМ ШУМОМ

Вступ. Дослідження асимптотичних властивостей оцінок невідомих параметрів функції регресії відомого вигляду, що спостерігається на фоні сильнозалежного випадкового шуму, в останні десятиліття стало дуже актуальною статистичною проблемою. Виділимо наукові роботи [1, 2], де за припущення сильної залежності стаціонарного випадкового шуму отримано властивості конзистентності оцінок найменших квадратів та оцінок найменших модулів невідомих параметрів функції регресії. Асимптотичні властивості періодограмних оцінок невідомих параметрів гармонічного сигналу та у випадку майже періодичної функції, що спостерігаються при наявності слабкозалежного шуму детально досліджено в [3, 4]. У даній роботі досліджено асимптотичні властивості оцінки невідомих параметрів майже періодичної функції в нелінійній моделі регресії «сигнал плюс шум» у випадку, коли шум є локальним функціоналом від гауссівського стаціонарного процесу із сильною залежністю.

Опишемо розглядувану модель та зробимо ряд припущень відносно неї.

(А). Нехай $\left\{n(t), t\in R^1\right\}=\left\{n(t)\right\}$ – дійсний неперервний у середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес із сильною залежністю (довгою пам’яттю) (див., наприклад, [5]), з $En(t)=0$ та коваріаційною функцією $B(t)$:

$$B\left(t\right)=\operatorname{cov}\left(n(0),n(t)\right)=\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{1/2}}, t\in R^1.$$

B). Нелінійна борелівська функція $G: R^1 \to R^1$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u)\varphi(u)\,du < \infty, \text{ де } \varphi(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2},\ u \in R^1.$$

За умови (B) функцію $G(u)$, $u \in R^1$ можна розкласти в ряд

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u),\ C_k = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u)\,du,\ k = 0,1,\ldots,$$

за ортогональними поліномами Чебишева – Ерміта

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2},\ k = 0,1,\ldots$$

у гільбертовому просторі $L_2\left(R^1, \varphi(u)\,du\right)$.

(B'). Існує ціле число $m \ge 1$ таке, що $C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$, $C_m \ne 0$ – коефіцієнти у розкладі функції $G(u)$, $u \in R^1$ за поліномами Чебишева – Ерміта. Ціле число $m \ge 1$ називається ермітовим рангом функції $G(u)$, $u \in R^1$.

(C). Припустимо, що задана майже періодична функція $\varphi(t)$ вигляду

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}.$$

Для величин c_k і λ_k виконуються умови:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty, \lambda_k \ge 0, \text{ при } k \ge 0,$$

$$c_k = c_{-k}, \lambda_k = -\lambda_{-k}, |\lambda_l - \lambda_k| \ge \Delta > 0 \text{ при } l \ne k,$$

$$|c_{i_0}| > |c_i| \text{ при } i \ne \pm i_0, i_0 > 0.$$

Нехай $\Theta \subset R^1$ – обмежений відкритий інтервал. Нехай виконуються умови (A), (B), (B'), (C) і на відрізку $[0,T]$ спостерігається випадковий процес $y(t)$:

$$y(t) = g\left(t, \theta^0\right) + \varepsilon(t), = t \in [0,T],$$

де $g\left(t,\theta^0\right) = A_0\varphi(\omega_0 t): R^1 \times \Theta \to R^1$ – вимірна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta^0 \in \Theta$, $\theta^0 = (A_0, \omega_0)$, $A_0 > 0, \omega_0 > 0$, а випадковий шум $\varepsilon(t) = G(n(t)), t \in R^1$, є таким, що $E\varepsilon(0) = 0$ (або $C_0 = 0$), $E\varepsilon^2(0) = 1$.

Необхідно за спостереженнями $\{y(t), 0 \le t \le T\}$ оцінити невідомі параметри A_0 та ω_0, припускаючи, що довжина інтервалу спостережень $T \to \infty$.

Розглянемо функціонал

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T y(t) e^{i\omega t} dt \right|^2, \ \omega \geq 0.$$

Періодограмною оцінкою ω_T для частоти ω_0 називається те значення $\omega \geq 0$, при якому $Q_T(\omega)$ приймає найбільше значення на $[0, \infty)$. Періодограмна оцінка $\tilde{A}_T$ для амплітуди A_0 у випадку виконання умови (C), як буде показано пізніше, визначається за формулою $\tilde{A}_T = \frac{1}{2} \left| c_{i_0} \right|^{-1} Q_T^{1/2}(\omega_T)$.

Для доведення наступної теореми розглянемо допоміжне твердження. Позначимо $\eta(T) = \sup\limits_{\omega \in R^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} \varepsilon(t) dt \right|$.

Лема [2]. Якщо виконуються умови (A), (B), (B'), то

$$E\eta^2(T) \to 0 \text{ при } T \to \infty. \tag{1}$$

Теорема. Якщо виконуються умови (A), (B), (B'), (C), то періодограмна оцінка $\tilde{\theta}_T = (\tilde{A}_T, \tilde{\omega}_T)$ є консистентною оцінкою параметра θ, а саме:

$$\tilde{A}_T \xrightarrow{P} A_0, \ T(\tilde{\omega}_T - \omega_0) \xrightarrow{P} 0,$$

де $\tilde{\omega}_T = \frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}$, $\tilde{A}_T = \frac{1}{2} \left| c_{i_0} \right|^{-1} Q_T^{1/2}(\omega_T)$, „$\xrightarrow{P}$" збіжність за ймовірністю при $T \to \infty$.

Доведення. Виділимо декілька етапів доведення.

1. Розглянемо поведінку величини $Q_T(\omega)$ при будь-якому фіксованому $\omega \neq 0$ при $T \to \infty$:

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T \left[g(t, \theta^0) + \varepsilon(t) \right] e^{i\omega t} dt \right|^2 = \left| \frac{2}{T} \int_0^T \left[g(t, \theta^0) + \varepsilon(t) \right] e^{i\omega t} dt \right|^2 + I_T(\omega),$$

де $I_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 + 2\,\mathrm{Re} \frac{4}{T^2} \int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt$.

Легко бачити з умови (C), що $\frac{1}{TA_0} \left| \int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \right| \leq C, \ 0 < C < \infty.$

Із леми випливає, що $\sup\limits_{\omega} \left| I_T(\omega) \right| \xrightarrow{P} 0$ при $T \to \infty$.

Нехай $\Phi_T\left(\theta^0,\omega\right)=\frac{2}{T}\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega t}dt$, тоді враховуючи вигляд функції $g\left(t,\theta^0\right),\, t\in R^1$, справедлива рівність

$$\Phi_T\left(\theta^0,\omega\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2A_0}{T}c_k\int_0^T e^{i\,(\lambda_k\omega_0+\omega)t}dt.$$

Нехай $0<\delta<\frac{\Delta\omega_0}{2}$ і $\left|\lambda_{i_0}\omega_0+\omega\right|\geq\delta.$ Припустимо, що для деякого $k\neq i$ $\left|\lambda_k\omega_0+\omega\right|\leq\delta.$ Тоді для будь-якого $l\neq k$ маємо $\left|\lambda_l\omega_0+\omega\right|=\left|\left(\lambda_k\omega_0+\omega\right)+\right.$ $\left.+\left(\lambda_l-\lambda_k\right)\omega_0\right|>\omega_0\left|\left|\lambda_l-\lambda_k\right|-\frac{1}{2}\Delta\right|\geq\frac{1}{2}\Delta\omega_0>\delta$, а тому, враховуючи умову (C) та слідування (1) попередньої леми, маємо

$$\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{\substack{\omega\geq 0\\ \left|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega\right|\geq\delta}}Q_T\left(\omega\right)\leq\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{\substack{\omega\geq 0\\ \left|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega\right|\geq\delta}}\left|\Phi_T\left(\theta^0,\omega\right)\right|^2=\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{\substack{\omega\geq 0\\ \left|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega\right|\geq\delta}}\left[\frac{2}{T}\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega t}dt\right]=$$

$$=\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{\substack{\omega\geq 0\\ \left|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega\right|\geq\delta}}\left[\frac{2A_0}{T}\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i(\lambda_k\omega_0+\omega)t}dt\right]^2\leq$$

$$\leq\varlimsup_{T\to\infty}\sup_{\substack{\omega\geq 0\\ \left|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega\right|\geq\delta}}\left\{\max_{k\neq\pm i_0}\left[A_0^2\left|c_k\right|^2\left|\frac{2}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_k\omega_0+\omega)t}dt\right|^2\right]\right\}\leq 4A_0^2\max_{k\neq\pm i_0}\left|c_k\right|^2<4A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2. \qquad (2)$$

Легко бачити, що $\lim_{T\to\infty}Q_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)=4A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2.$

Тепер слабка консистентність оцінки $\tilde{\omega}_T$ легко доводиться методом від супротивного аналогічно доведенню теореми 43 у роботі [5, стор. 174].

Із визначення оцінки ω_T відомо, що $Q_T(\omega_T)\geq Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0),$ а тому

$$0\leq Q_T\left(\omega_T\right)-Q_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)=I_T\left(\omega_T\right)-I_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)+$$

$$+\frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega_T t}dt\right|^2-\frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2. \qquad (3)$$

Із леми слідує, що $I_T\left(\omega\right)\xrightarrow{P}0$ при $T\to\infty.$ Тоді при $0<\delta<\frac{\Delta\omega_0}{2}$ маємо

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4}{T^2}\sup_{\omega\ge 0}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega t}dt\right|^2-\frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4}{T^2}\max\left\{\sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|\ge\delta\\ \omega\ge 0}}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega t}dt\right|^2,\ \sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|<\delta\\ \omega\ge 0}}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega t}dt\right|^2\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\right\}\le 0.$$

Таким чином, із нерівностей (2) та(3) випливає, що

$$\lim_{T\to\infty}Q_T\left(\omega_T\right)=\lim_{T\to\infty}Q_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)=4A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2. \tag{4}$$

2. Тепер покажемо, що має місце наступне слідування:

$$T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}-\omega_0\right)\xrightarrow{P}0 \text{ при } T\to\infty.$$

На першому етапі доведення показано, що при $T\to\infty$ права частина (3) прямує до 0. Тоді при $T\to\infty$

$$\left|\frac{2}{T}\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega_T t}dt\right|^2-\left|\frac{2}{T}\int_0^T g\left(t,\theta^0\right)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\xrightarrow{P}0. \tag{5}$$

Розглянемо

$$\lim_{T\to\infty}\left|\frac{2}{T}\int g\left(t,\theta^0\right)e^{i\omega_T t}dt\right|^2=4A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2\lim_{T\to\infty}\left|\frac{e^{i\left(\omega_T-\lambda_{i0}\omega_0\right)^T}-1}{\left(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T\right)T}\right|^2.$$

Оскільки $\omega_0>0$ та $\omega_T\ge 0$, то, враховуючи останню рівність, слідування (5) справедливе тоді і тільки тоді, коли при $T\to\infty$

$$\left|\frac{e^{i\left(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0\right)T}-1}{\left(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T\right)T}\right|\xrightarrow{P}1$$

або, що те ж саме,

$$\frac{\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T\right)T}{\left(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T\right)T}\xrightarrow{P}1,\text{ при } T\to\infty.$$

Останнє можливе тоді і тільки тоді, коли $T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}-\omega_0\right)\xrightarrow{P}0$ при $T\to\infty$.

Цим самим доведено консистентність та швидкість збіжності оцінки $\tilde{\omega}_T$ до її істинного значення.

3. Із доведення другого етапу теореми та рівностей (4) очевидним чином випливає консистентність оцінки $\tilde{A}_T$ параметра A_0. Із рівності (4) легко бачити, що

$$\tilde{A}_T = \frac{1}{2}\left|c_{i_0}\right|^{-1} Q_T^{1/2}\left(\omega_T\right) \text{ при } T \to \infty.$$

Теорему доведено.

Висновок. Отримано умови консистентності періодограмних оцінок невідомих параметрів майже періодичної функції у випадку регресійної моделі спостережень із сильнозалежним випадковим шумом. Цей результат дає можливість подальшого вивчення асимптотичних властивостей періодограмних оцінок, а саме дослідження асимптотичної нормальності та асимптотичної ефективності цих оцінок, коли шум є сильнозалежним випадковим процесом.

Г.Д. Била

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ
В МОДЕЛЯХ С СИЛЬНОЗАВИСИМЫМ ШУМОМ

Рассматривается нелинейная модель регрессии с почти периодической функцией и случайным шумом в предположении, что шум является локальным функционалом от гауссовского стационарного процесса с сильной зависимостью. Исследованы периодограммные оценки неизвестных параметров функции в заданной модели и доказана их состоятельность.

G.D. Bila

THE ESTIMATOR CONSISTENCY OF THE UNKNOWN PARAMETERS IN THE MODELS WITH STRONGLY DEPENDENT NOISE

We consider the non-linear regression model with almost periodic function and random noise, assuming the noise is a local functional of Gaussian stationary process with long-range dependence. We investigated periodogram estimations of unknown parameters for the function in a given model and we proved their consistency.

1. *Ананьєва О.О., Іванов О.В.* Консистентність оцінки найменших модулів параметра нелінійної регресії // Наукові вісті НТУУ „КПІ”. Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук. – 2009. – Вип. 3. – С. 138 – 142.
2. *Жураковський Б.М., Іванов О.В.* Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильно залежним шумом // Наукові вісті НТУУ «КПІ». Теоретичні та прикладні проблеми математики. – 2010. – Вип. 4. – С. 60 – 66.
3. *Knopov P.S., Kasitskaya E.J.* Empirical estimates in stochastic optimization and identification. – Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 250 p.
4. *Гречка Г.П., Дороговцев А.Я.* Об асимптотических свойствах периодограммной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания // Вычислительная и прикладная математика. – 1976. – Вып. 28. – С. 18 – 31.
5. *Beran J.* Statistics for long-memory processes. Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 61. – New York: Chapman & Hall, 1994. – 315 p.

Одержано 11.05.2012