УДК 519.85

В.Н. КУЗЬМЕНКО, В.В. БОЙКО

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ PNK-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматривается возможность решения невыпуклых задач оптимизации PNK-методом, использующим переменную кусочно-линейную аппроксимацию функций и подбирающим точный штрафной множитель при наличии ограничений. Изучаются условия сходимости метода к локальному оптимуму в случае невыпуклости. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Введение. В настоящей работе описываются особенности применения PNK-метода (комбинированного метода выпуклого программирования) [1, 2] к задачам с невыпуклыми функциями. Метод основан на использовании информации в окрестности текущей точки в виде набора отсекающих плоскостей, а также на подборе точного штрафного множителя для задач с ограничениями. Опыт применение PNK-метода для решения прикладных задач показал вычислительную эффективность и надежность данного метода [1, 3]. Разработана модификация метода, генерирующая последовательность точек, сходящуюся к решению, по допустимой области исходной задачи [2], а также модификация, позволяющая для гладких задач учитывать информацию об окрестности текущей точки в виде квадратичной регуляризирующей добавки [4].

В научной литературе методы, основанные на аналогичных идеях, носят название "bundle method" или "bundle proximal methods". Рассматриваются в основном методы для решения задач без ограничений [5–8]. Для поиска решений невыпуклых задач используются разные подходы. Так в [8] используется локальная динамическая коррекция задачи, которая делает ее выпуклой в некоторой окрестности текущей рекордной точки. В отличие от названных работ PNK-метод находит локальные минимумы задач минимизации с ограничениями, используя изменяющуюся выпуклую аппроксимацию целевой функции и ограничений.

Изначально PNK-метод разработан для решения задач выпуклого программирования

$$\min_x \{ f(x) \colon f_j(x) \le 0,\ 1 \le j \le m,\ x \in M \}, \tag{1}$$

где $x \in R^n$; f, f_j – выпуклые непрерывные функции, принимающие конечные значения на выпуклом многограннике M .

Поиск решения основан на следующей итерационной процедуре.

Пусть сделано $k-1$ итераций. В результате получено множество точек X_k , состоящее из начальной точки $x_1 \in M$ и $k-1$ точек $x_i \in M$, $i = 2,...,k$ – результатов итераций.

Очередная k-я итерация заключается в решения квадратичной задачи, в которой минимизируется кусочно-линейная аппроксимация, построенная по точкам множества X_k , штрафной функции исходной задачи с учетом регуляризирущей квадратичной добавки, а именно:

$$\min_{x,\, \xi_1, \xi_2} \{ \frac{1}{2h_k} \| x - x_r \|^2 + \xi_1 + N_k\, \xi_2 \}, \tag{2}$$

$$f(x_i) + (f'(x_i),\ x - x_i) \le \xi_1,\ \ \forall x_i \in X_k , \tag{3}$$

$$\varphi(x_i) + (\varphi'(x_i),\ x - x_i) \le \xi_2,\ \ \forall x_i \in X_k , \tag{4}$$

$$0 \le \xi_2,\ x \in M , \tag{5}$$

где $x_r = \arg\min \{ F_k(x) : x \in X_k \}$ – точка минимума штрафной функции $F_k(x) = f(x) + N_k \max\{0; \varphi(x)\}$ на X_k; r – индекс этой точки; $\varphi(x) = \max_j \{ f_j(x) \colon\ 1 \le j \le m \}$ – обобщенное ограничение; $f'(x)$, $\varphi'(x)$ – элементы субдифференциалов $\partial f(x)$, $\partial\, \varphi(x)$; N_k – значение штрафного множителя на итерации k; h_k – параметр, выполняющий роль шагового множителя; переменные ξ_1 и ξ_2 аппроксимируют соответственно целевую функцию f и функцию ограничений φ с помощью систем неравенств (3) и (4).

Точка x_{k+1}, найденная в результате решения задачи (2)–(4), добавляется к множеству точек аппроксимации $X_{k+1} = X_k \cup \{ x_{k+1} \}$.

Штрафной множитель N_k увеличивается, если найденное в результате решения задачи $\xi_2^* > 0$.

Регулировка шагового множителя h_k является наиболее сложной процедурой метода, поскольку этот множитель отвечает за скорость сходимости метода и точность аппроксимации исходной задачи.

Рассмотрим теперь общий случай, когда среди функций f, f_j , $j = 1,..., m$ есть невыпуклые, то есть задача в целом невыпукла.

Определение 1. Кусочно-линейная аппроксимация некоторой функции $\phi(x)$ в заданной точке x_r на множестве X является корректной, если для любой точки $x \in X$ $\phi(x)+(\phi'(x),\, x_r - x) \le \phi(x_r)$.

Определение 2. Кусочно-линейная аппроксимация (2)–(5) задачи (1) на итерации k есть корректной, если корректной есть аппроксимация функции $F_k(x)$, а именно: если для $x_r = \arg\min\{F_k(x) : x \in X_k\}$ и для любой точки $x \in X_k$ $f(x) + N_k\varphi(x) + (f'(x) + N_k\varphi'(x),\, x_r - x) \le F_k(x_r)$ при $\varphi(x) > 0$, и при $\varphi(x) \le 0$ $f(x) + (f'(x),\, x_r - x) \le F_k(x_r)$.

Из определения 1 следует, что корректность аппроксимации рассматривается только по отношению к текущей рекордной точке. При изменении рекордной точки корректность аппроксимации может нарушиться, что требует изменения аппроксимации задачи.

В случае невыпуклой задачи для функций f и φ будем использовать различные множества для аппроксимации X_k^f и X_k^φ, причем количество элементов в каждом множестве может быть меньше, чем итерация k, т.е. $\left|X_k^f\right| \le k,\ \left|X_k^\varphi\right| \le k$.

Рассмотрим возможные результаты добавления новой точки аппроксимации после итерации метода и изменении параметров работы метода. Пусть текущая аппроксимация задачи (1) есть корректной и в результате решения задачи (2)–(5) найдена новая точка x_{k+1}. Включим ее в множества X_k^f и X_k^φ.

Возможны следующие варианты:

1) Новая аппроксимация (2)–(5) задачи есть корректной;
2) Новая аппроксимация не есть корректной;
   a) рекордная точка изменилась (новым рекордом может быть x_{k+1} или рекордом стала другая точка после увеличения штрафа N_{k+1}). В этом случае есть точки, неверно аппроксимирующие f или φ в точке x_r. Например, для f это означает, что $f(x)+(f'(x),\, x_r - x) > f(x_r)$.
   b) рекордная точка не изменилась. Это означает, что точка x_{k+1} и(или) другие точки неверно аппроксимирует f и(или) φ в точке x_r.

В случае 1) процесс продолжается без удаления точек из X_k^f, X_k^φ.

В случае 2) продолжение работы алгоритма может быть построено несколькими способами.

Способ первый. В случай 2a) точки, неверно аппроксимирующие новый рекорд, выбрасываются из множеств X_k^f и(или) X_k^φ. В случае 2b) точка x_{k+1} выбрасывается из X_k^f и(или) X_k^φ, а шаговый множитель h_k уменьшается.

Такой способ является более простым, но при его реализации вместе с устранением некорректной аппроксимации теряется информация о значениях функций в ранее пройденных точках.

Второй способ позволяет исправить некорректность аппроксимации и сохранить информацию о значениях функций.

Пусть в точке x для некоторой функции ϕ выполнено неравенство $\phi(x)+(\phi'(x),\, x_r - x) > \phi(x_r)$. Изменим аппроксимацию в точке x таким образом, чтобы она стала корректной для x_r. Для этого найдем минимальный по модулю вектор g такой, что $\phi(x)+(\phi'(x)+g,\, x_r - x) \le \phi(x_r) - \Delta$, где $\Delta > 0$ – параметр, существенно превосходящий критерий $\varepsilon > 0$ точности поиска решения по значению функции. Получаем $(g,\, x_r - x) \le \phi(x_r) - \phi(x) - (\phi'(x),\, x_r - x) - \Delta$. Наименьший по модулю вектор g колинеарен разности $x_r - x$, т.е. $g = t(x_r - x)$, где t – искомый параметр. Обозначив правую часть последнего неравенства $\Delta_x^{\phi} < 0$ и найдя t, получим $g = (x_r - x) \cdot \Delta_x^{\phi} / (x_r - x)^2$.

Для обоих предложенных способов построения корректной аппроксимации невыпуклой задачи возможно нахождение "ложного" минимума, если использовать теже критерии остановки алгоритма, что и для выпуклого случая. Имеется ввиду следующее.

Среди критериев остановки в PNK-методе есть достижение минимальной величины смещения на итерации $|x_r - x_{k+1}| \le \delta$ и точности аппроксимации рекорда $F_k(x_r) - (\xi_1^* + N_k\, \xi_2^*) \le \varepsilon$, где $\varepsilon, \delta > 0$ – малые параметры.

В случае невыпуклой задачи выполнение этих критериев не гарантирует приближения к локальному минимуму. (Нетрудно построить примеры, показывающие это). Кусочно-линейная аппроксимация, для которой выполнение критериев остановки означает нахождение локального минимума, должна строиться на точка, лежащих в окрестности этого минимума.

Поэтому при выполнении указанных критериев изменяется аппроксимация задачи с целью проверки рекордной точки. А именно: каждое из множеств X_k^f и X_k^{φ} изменяется так $X'_k = \{x_r + 0.5\,(x - x_r) \mid \forall x \in X_k\}$, т.е. рекордная точка остается, а все остальные приближаются к рекордной. В результате либо итерационный процесс может быть продолжен, либо множество точек аппроксимации снова приближается к рекордной. Локальный минимум считается найденным, если выполнены критерии останова и точки аппроксимации лежат в некоторой заданной окрестности рекорда $\max\limits_{\forall x \in X_k} \|x - x_r\| \le \gamma$ для обоих множеств X_k^f и X_k^{φ}.

Результаты вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты проводились с целью демонстрации возможностей PNK-метода при поиске минимумов невыпуклых задач оптимизации. В качестве тестовых примеров были взяты невыпуклые задачи, которые можно найти на сайте программного продукта AMPL [9]. Результаты вычислений приведены в таблице.

Название файла задачи	Размерность задачи, n	Кол-во переменных	Полученное решение	Время решения, с
blend.mod	10	10	16483.87	0.5
cut.mod	10	15	5463.893	0.1
econmin.mod	100	65	67.12048	3.9
iocol2.mod	100	90	478.3789	7.9
net3.mod	1000	300	0.476892	22.6
steel4.mod	1000	700	32901.98	10.3
transp11.mod	5000	100	8.734901	198.5
prod0.mod	5000	3000	3789214.	28.5

Заключение. В результате выполненной работы построен алгоритм нахождения локальных минимумов невыпуклой задачи, основанный на PNK-методе. Предложены варианты реализации алгоритма. Дальнейшее развитие работы будет направлено на улучшение эффективности поиска локальных минимумов задач, а также на построение оценок при поиске глобального минимума.

В.М. Кузьменко, В.В. Бойко

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕОПУКЛИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ PNK-МЕТОДОМ

Розглядається можливість розв'язання неопуклих задач оптимізації PNK-методом, яких використовує змінну частково-лінійну апроксимацію функцій та знаходить точний штрафний множник у разі наявності обмежень. Вивчаються умови збіжності метода до локального оптимуму у випадку, що розглядається. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

V.M. Kuzmenko, V.V. Boyko

SOLVING NONCONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS BY PNK-METHOD

An opportunity for solving nonconvex optimization problems by PNK-method is considered. This method uses variable piecewise linear approximation for functions and finds exact penalty multiplier for constraints. Convergence conditions to local optimum are studied. Results of computational experiments are added.

1. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н.* Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121–134.

2. *Кузьменко В.Н., Бойко В.В.* О применении комбинированного метода выпуклого программирования // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. – С. 19–24.
3. *Бойко В.В., Кузьменко В.Н.* Применение комбинированного метода выпуклого программирования в задачах финансовой математики // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2008. – С. 146–152.
4. *Бойко В.В., Кузьменко В.Н.* Использование квадратичного приближения функций в PNK-методе // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2010. – С. 120–125.
5. *Fuduli A., Gaudioso M., Giallombardo G.* A DC piecewise affine model and a bundling technique in nonconvex nonsmooth minimization // Optim. Methods Softw. – **19** (1).– 2004. – P. 89–102.
6. *Noll D., Prot O., Rondepierre A.* A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex functions // Pac. J. Optim. – **4** (4). – 2008. – P. 569–602.
7. *Hare W., Sagastizabal C.* Computing proximal points of nonconvex functions // Math. Program. – **116** (1-2, Ser. B). – 2009. – P. 221–258.
8. *Hare W., Sagastizabal C.* A redistributed proximal bundle method for nonconvex optimization // SIAM J. Optim. – **20**. – 2010. – P. 2442-2473.
9. AMPL Examples – http://www.ampl.com/EXAMPLES/index.html

Получено 13.04.2012