Приводится описание математической модели и метода решения одного класса задач перевозок на транспортной сети. Метод решения основан на использовании алгоритмов негладкой оптимизации. Предлагается приближенный алгоритм решения задачи с учетом ограничений дискретного характера.

УДК 519.8

Н.Г. ЖУРБЕНКО, Б.М. ЧУМАКОВ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Математические модели многих задач оптимального проектирования, управления и планирования коммуникаций систем описываются многопродуктовыми сетевыми транспортными задачами. В данной работе приводится описание метода решения одного класса таких задач, основанный на использовании алгоритмов негладкой оптимизации [1]. Математическая модель описывается на концептуальном уровне. Входные данные модели помечаются словом data, выходные – result.

Транспортная сеть представляется ориентированным графом $G = \{I, J\}$. I (data) – множество вершин (узлов, станций) графа; i – индекс перечисления вершин. J (data) – множество ориентируемых ребер (дуг, участков) графа; j – индекс перечисления ребер. $J^+(i)(J^-(i))$ (data) – множество ребер, входящих в вершину (выходящих из вершины) i; $i^-(j)(i^+(j))$ (data) – начальная (конечная) вершина ребра j. L (data) – множество типов продуктов (грузов); l – индекс перечисления типов продуктов. Q (data) – множество корреспонденций; q – индекс перечисления корреспонденций. Для корреспонденции $q \in Q$ определены следующие данные: тип груза l_q (data); прогнозируемый объем перевозки b_q (data). В модели будет использоваться следующая вариантная схема реализации корреспонденций. Эта схема основана на том, что для каждой корреспонденции q априори задано множество способов ее реализации Ω_q (data). Для каждой реализации $\omega \in \Omega_q$ определены следующие данные: маршрут $\Re_q(\omega)$ (data); тариф стоимости перевозки единицы груза $c_q^+(\omega)$ (data). Маршрут $\Re_q(\omega)$ определяется последовательным списком участков сети. Начальная станция $i_q^-(\omega) = i^-(j^1)$ маршрута $\Re_q(\omega)$) – одна из станций отправления корреспонденции. Конечная станция $i_q^+(\omega) = i^+(j^{n_q})$ маршрута $\Re_q(\omega)$ – одна из станций назначения корреспонденции.

Представленная форма данных вариантов реализаций корреспонденций информационно избыточна. Однако такая форма описания вариантов реализаций корреспонденций обеспечивает компактность записи и простоту интерпретации модели. Кроме того она имеет высокую форму общности и обеспечивает учет различных вариантов постановки задачи. Формально множество вариантов реализаций корреспонденции рассматривается в модели как входные данные. Как правило, эти данные программно генерируются. При этом в качестве маршрутов корреспонденций могут, например, выбираться кратчайшие по выбранным критериям (по расстоянию; по эксплуатационным расходам; времени реализации) пути на транспортной сети, соединяющие станции отправления и назначения корреспонденции. При генерировании маршрутов корреспонденций могут учитываться дополнительные (технологические, экологические) требования, которые в явном виде в модели не отражены.

Каждой реализации ω корреспонденции q соответствует переменная модели $x_q(\omega) \geq 0$ (result) – объем перевозки корреспонденции q по варианту ее реализации ω. Множество всех переменных $x_q(\omega)$ обозначим X^+.

Общий объем реализуемых перевозок корреспонденции должен быть не большим, чем заданный прогнозируемый максимальный объем корреспонденции b_q. Обозначим $x_q^- \geq 0$ (result) – нереализованный объем корреспонденции q. c_q^- (data) – штрафной множитель за наличие единицы нереализованного объема корреспонденции q. Заметим, что штрафные множители c_q^- отражают, как правило, не реальные финансовые потери за отказ от полной реализации корреспонденции, а являются управляющими параметрами модели. Эти параметры позволяют ранжировать корреспонденции по степени важности реализации их перевозок. Кроме того, введение переменных x_q^- обеспечивает формальную совместность ограничений модели.

Переменные $x_q(\omega)$ и x_q^- удовлетворяют балансовым соотношениям:

$$\sum\{x_q(\omega) \mid \omega \in \Omega_q\} + x_q^- = b_q, \quad q \in Q, \quad x_q(\omega) \geq 0, \quad x_q^- \geq 0. \tag{1}$$

Множество всех переменных x_q^- будет обозначаться X^-.

Общий «доход» $F^+(X^+)$ от реализаций корреспонденций и общий «штраф» $F_b^-(X^-)$ за наличие нереализованных перевозок определяются равенствами

$$F^+(X^+) = \sum\sum\{c_q^+(\omega)x_q(\omega) \mid \omega \in \Omega_q; q \in Q\},$$

$$F_b^-(X^-) = \sum\{c_q^- x_q^- \mid q \in Q\}.$$

Пусть $w^q(j)$ (result) – перевозимый по участку j объем корреспонденции q. Значения $w^q(j)$ однозначно определяются значениями переменных $x_q(\omega)$:

$$w^q(j) = \sum\{x_q(\omega) \mid \ j \in \Re_q(\omega); \omega \in \Omega_q\}.$$

Тогда условие ограниченности пропускной способности участка $j \in \tilde{J}$ будет соответствовать следующим ограничениям:

$$\sum\{\gamma_q w^q(j) \mid q \in Q\} \leq r_j, j \in \tilde{J}, \tag{2}$$

где γ_q (date) – масштабирующий коэффициент, определяемый типом корреспонденции q.

Общие эксплуатационные затраты на перевозки всех корреспонденций $F_c^-(X^+)$ определяются следующим образом:

$$F_c^-(X^+) = \sum\{c_{qj}^- w^q(j) \mid q \in Q; j \in J\},$$

где c_{qj}^- – затраты на перевозку единицы объема корреспонденции q на участке j.

Задача состоит в максимизации целевой функции $F(X^+, X^-)$ – максимизации «общего дохода»:

$$\max \leftarrow F(X^+, X^-) = F^+(X^+) - F_c^-(X^+) - F^-(X^-) \tag{3}$$

при ограничениях (1), (2).

Основными переменными задачи являются переменные реализаций вариантов перевозок корреспонденций X^+, и переменные нереализованных их объемов X^+. Остальные переменные и указанные выше соотношения являются вспомогательными и введены для компактности записи и простоты интерпретации модели.

Задача (1) – (3) является задачей линейного программирования. Основной особенностью реальных задач рассматриваемого класса является их большая размерность. Кроме того, при разработке метода решения предусмотрена возможность учета нелинейности отдельных функционалов модели (например, эксплуатационных затрат реализации перевозки от ее объема). Поэтому использование стандартного программного обеспечения для их решения неэффективно.

Для реализации приведенного класса задач разработаны специализированные численные методы, учитывающие особенности математической модели: сетевой характер многих соотношений задачи, блочную структуру переменных и ограничений.

В качестве базовых элементов разработанные методы решения задач используют следующие алгоритмы:

- алгоритм нахождения кратчайших путей на графе [2] (используется для генерации возможных маршрутов реализаций перевозок корреспонденции на транспортной сети);
- алгоритм негладкой оптимизации в схемах декомпозиции блочных задач математического программирования [1] (используется для решения двойственной относительно ограничений (2)).

Трудоемкость решения задачи в основном определяется решением двойственной, относительно ограничений (2), задачи.

Решение задачи многоэтапное.

Во-первых, это связано с тем, что определенный после решения задачи факт невозможности реализации всех перевозок (наличие положительных значений для переменных x_q^-) может быть связан не только с ограниченностью пропускных способностей участков сети (ограничения (2)). Это может быть связано с учетом не всех возможных реализаций перевозок корреспонденций («бедность» множеств Ω_q). Поэтому, на основе анализа уже полученного решения, выполняется пополнение множеств $\Re_q(\omega)$ – возможных маршрутов реализаций перевозок и решается таким образом модифицированная задача. В предельном случае (если позволяет мощность компьютера), можно учесть все маршруты реализации перевозки, т. е. перейти к традиционной задаче определения потоков на сетях.

Во-вторых, для реальных задач рассматриваемого класса часто имеется следующее требование (дискретного характера) на допустимость перевозки (некоторых) корреспонденций: перевозка должна производиться только по одному варианту ее возможных реализаций. Адекватный учет такого требования приводит к задаче с булевыми переменными. Для задачи большой размерности можно рассчитывать на получение лишь приближенного ее решения (обычно без оценки точности). Поэтому предлагается следующий алгоритм приближенного решения таких задач. В результате решения двойственной задачи для большинства корреспонденций реализация будет выполнятся только по одному из заданных вариантов. Тогда для таких корреспонденций полученный вариант принимается за решение задачи. После исключения этих корреспонденций размерность задачи может оказаться приемлемой для ее решения с учетом булевости переменных. Отметим еще один способ получения приближенного решения на основе решения двойственной задачи. В процессе работы алгоритма решения двойственной задачи будут генерироваться множество «одновариантных» реализаций корреспонденций, соответствующих решению внутренней задачи используемой схемы декомпозиции. Разумеется, «полезные» одновариантные решения будут на итерациях алгоритма вблизи оптимального решения двойственной задачи. Кроме того, для такой генерации вариантов можно использовать обобщенный градиентный метод с постоянным шагом (см., например, [3]), стартующий с уже найденного приближенного решения. В процессе его работы производим отбор наилучшего одновариантного решения (наилучшего в смысле минимального нарушения ограничений (2)). Таким образом найденное решение обычно приемлемо при решении реальных задач перспективного планирования, поскольку, ограничения на пропускную способность задаются на основе прогноза с достаточно большой неопределенностью.

М.Г. Журбенко, Б.М. Чумаков

ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ БАГАТОПРОДУКТОВОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Наводиться опис математичної моделі та методу розв'язання одного класу задач перевезень на транспортній мережі. Метод рішення оснований на використанні алгоритмів негладкої оптимізації. Пропонується наближений алгоритм розв'язання задачі з урахуванням обмежень дискретного характеру.

N.G. Zhurbenko, B.M. Chumakov

ON ONE MODEL OF MULTICOMMODITY TRANSPORTATION PROBLEM

The article describes mathematical model and solution method for a class of transportation on transport network problem. The solution method utilises nonsmooth optimization algorithm. The approximate solution algorithm of the problem with account of discrete constraints is proposed.

1. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 199 с.
2. *Филипс Д., Гарсиа-Диа А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
3. *Беляева Л.В., Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* О методе решения одного класса динамических распределительных задач // Экономика и математические методы. – 1978. – **14**, вып. 1. – С. 137 – 146.

Получено 27.03.2013