

*Рассматривается проблема упаковки системы неравных кругов в круг минимального радиуса, так чтобы центр тяжести системы размещаемых кругов находился в центре внешнего круга. Даны две ее формулировки: в виде квадратичной экстремальной задачи и – задачи обратного-выпуклого программирования. Для поиска локальных экстремумов предлагается метод, основанный на модификации  $r$ -алгоритма. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.*

© Э.И. Ненахов, Т.Е. Романова,  
П.И. Стецюк, 2013

*Теорія оптимальних рішень. 2013*

УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ, Т.Е. РОМАНОВА, П.И. СТЕЦЮК

## РАВНОВЕСНАЯ УПАКОВКА КРУГОВ В КРУГ МИНИМАЛЬНОГО РАДИУСА\*

**Введение.** Наиболее эффективный способ упаковки кругов не так уж очевиден. Одна из известных постановок звучит так: найти такой способ расположения непересекающихся равных кругов на плоскости, при котором будет покрыта наибольшая часть этой плоскости. Возникающие при этом упаковки кругов обладают многими интересными свойствами. Так, например, доказано, что наилучшему заполнению плоскости (плотность равна  $\pi\sqrt{3}/6 \approx 0.9069$ ) соответствует размещение центров кругов в вершинах правильных шестиугольников [1].

Более сложной является задача плотной упаковки кругов (многомерных шаров) в компактных областях [2]. Например, задача поиска минимального радиуса круга, в котором нужно разместить непересекающиеся круги заданных радиусов. Задача усложняется, если ввести дополнительные ограничения на механические свойства системы размещаемых объектов (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость), возникающих в *space engineering* [3].

Одна из таких задач является предметом исследования в данной работе. Подход к ее решению связан с формулировкой проблемы в виде многоэкстремальных задач математического программирования, и поиска их локальных экстремумов с помощью методов негладкой оптимизации.

\* Работа частично поддержана совместным грантом НТЦУ и НАН Украины (проект № 5710).

**Математическая модель задачи.** Пусть в двумерном евклидовом пространстве имеется семейство кругов  $S_i$  с заданными радиусами  $r_i$  и весами  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Полагаем, что центр тяжести круга  $S_i$  находится в его центре. Равновесной упаковкой кругов  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , назовем такую их упаковку в круг  $S$ , чтобы радиус круга  $S$  был минимальным и центр тяжести семейства кругов  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , совпадал с центром круга  $S$ .

Не ограничивая общности, будем считать, что центр круга  $S$  находится в начале координат. Пусть  $(x_i, y_i)$  – неизвестный центр круга  $S_i$ ,  $r$  – неизвестный радиус круга  $S$ . Обозначим известные величины  $\lambda_i = w_i / \sum_{i=1}^m w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и очевидную нижнюю границу на искомый радиус  $r_{low} = \max_{i=1, \dots, m} r_i$ . Тогда равновесной упаковке двумерных кругов  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , соответствует многоэкстремальная задача нелинейного программирования в  $E^{2m+1}$ :

$$r^* = \min_{r \geq r_{low}, x, y} r \quad (1)$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0. \quad (4)$$

Ограничения (2) гарантируют, что каждый круг  $S_i$  содержится внутри круга  $S$ , а ограничения (3) – что никакие два круга из  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , не пересекаются (не имеют общих внутренних точек). Ограничения (4) означают, что центр тяжести семейства кругов  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , находится в начале координат (в центре круга  $S$ ).

Задача (1)–(4) возникает в проблеме упаковки одинаковых по высоте  $m$  прямых круговых цилиндров в цилиндрический контейнер минимального радиуса с учетом ограничений, связанных с механическими характеристиками поведения системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость) [3, 4]. Последняя относится к 3D-задачам размещения и формулируется в виде задачи нелинейного программирования с линейной целевой функцией, линейными и нелинейными ограничениями в форме неравенств [5]. Количество переменных в задаче равно  $3m + 1$ , из них по 3 переменных отвечают параметрам размещения каждого объекта и переменная  $r$  отвечает радиусу основания контейнера. Ограничения в задаче включают: а)  $m$  квадратных невыпуклых ограничений принадлежности объектов цилиндрическому

контейнеру; b)  $m(m-1)/2$  невыпуклых квадратичных ограничений непересечения размещаемых объектов; c) шесть линейных неравенств на допустимые отклонения от центра масс системы (ограничения равновесия); d) шесть квадратичных неравенств на допустимые отклонения от моментов инерции системы (ограничения моментов инерции); e) шесть дробно-квадратичных неравенств на допустимые погрешности угла наклона главной оси системы от осей координат (ограничения устойчивости).

Отдельным случаем вышеописанной 3D-задачи упаковки является 2D-задача (1)–(4), где учтены только ограничения равновесия (см. рис. 1, [4]). Для 2D-задачи ограничения равновесия, т. е. линейные неравенства на допустимые отклонения от центра масс системы одинаковых по высоте цилиндров, сформулированы с помощью ограничений в форме равенств (4). Это оказывается удобным при разработке методов оптимизации, так как учет ограничений-равенств можно обеспечить либо проектированием на гиперплоскость, либо удалением одной из переменных в каждом из двух равенств, перейти к задаче нелинейного программирования, в которой будет на две переменные меньше.

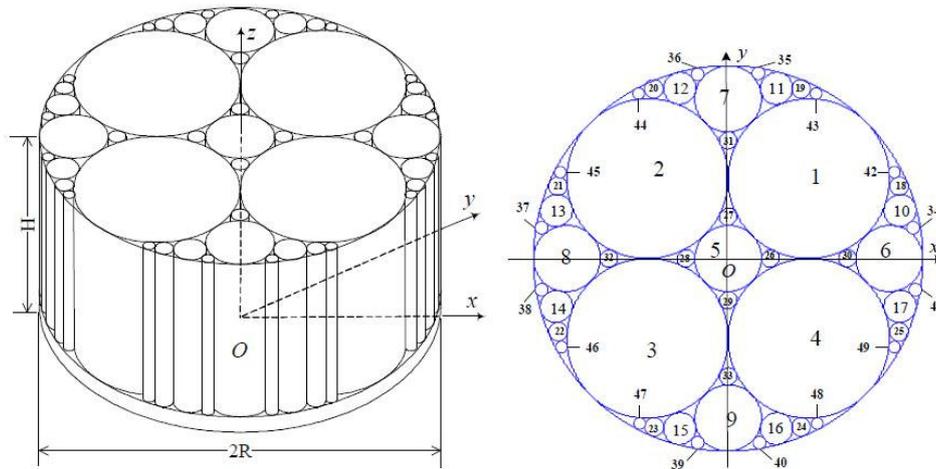


РИС. 1. Пример оптимального размещения 49-ти круговых цилиндров в круговом контейнере

**Квадратичная экстремальная задача.** Задача (1) – (4) является квадратичной экстремальной задачей, где целевая функция и часть ограничений – линейные. Ее можно сформулировать в виде

$$f^* = (r^*)^2 = \min_{r \geq r_{low}, x, y} r^2 \quad (5)$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad (7)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right)^2 = 0, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i\right)^2 = 0, \quad (8)$$

где целевая функция  $f$  и все ограничения заданы квадратичными функциями. Задача (5)–(8) является более удобной для исследования нижней границы оптимального значения  $f^*$  с помощью предложенной Н.З. Шором техники лагранжевых двойственных оценок в квадратичных многоэкстремальных задачах [6]. Эта техника включает в себя алгоритмы поиска двойственных оценок на основе методов недифференцируемой оптимизации и использование функционально избыточных ограничений для улучшения точности двойственных оценок.

Чтобы обеспечить нетривиальную, т. е. не равную  $-\infty$  нижнюю оценку для  $f^*$  достаточно к задаче (5)–(8) добавить квадратичное неравенство

$$r^2 - (r_{low} + r_{up})r + r_{low}r_{up} \leq 0, \quad (9)$$

где  $r_{up}$  – верхняя граница на неизвестный радиус  $r$ . Вначале ее можно установить равной  $mr_{low}$ , т. е. очевидной границе сверху на  $r$ , а затем последовательно уточнять по мере нахождения локальных минимумов в задаче (1)–(4), либо (5)–(8). Квадратичное неравенство (9) является следствием умножения двух линейных неравенств: неравенства  $r - r_{low} \geq 0$  и неравенства  $r - r_{up} \leq 0$ . Заметим, что подобные квадратичные неравенства можно строить и для некоторых из компонент переменных  $x_i, y_i, i = 1, \dots, m$ .

Пусть  $q^*$  – двойственная оценка снизу для  $f^*$  в задаче (5)–(9) и пусть  $q^* < f^*$ . Тогда ее можно последовательно улучшать не только за счет добавления функционально избыточных квадратичных ограничений, которые являются нетривиальными следствиями условий задачи, а также за счет замены некоторых из неравенств в (7) равенствами, что означает, что соответствующие этим неравенствам круги должны соприкасаться друг с другом.

**Задача обратно-выпуклого программирования.** Задачу равновесной упаковки кругов в круг минимального радиуса можно записать как задачу обратно-выпуклого программирования [7], которая дополнена линейными и выпуклыми ограничениями. Эта задача имеет следующий вид:

$$r^* = \min_{r, x, y} r \quad (10)$$

при ограничениях

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0, \quad (12)$$

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq r - r_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

и может быть решена с помощью метода линеаризации [7, 8].

Из задачи (10) – (13) следует еще одна формулировка задачи равновесной упаковки кругов. Она является условной задачей минимизации негладкой выпуклой функции и имеет следующий вид:

$$r^* = \min_{x,y} \max_{i=1,\dots,m} \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \right) \quad (14)$$

при ограничениях

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0. \quad (16)$$

Для нахождения локальных минимумов всех указанных выше задач можно использовать методы негладкой оптимизации. Опишем метод, который мы будем использовать.

**$r(\alpha)$ -алгоритм и программа `ralgb5`.**  $r(\alpha)$ -алгоритм относится к семейству субградиентных методов минимизации негладких выпуклых функций, которые известны как  $r$ -алгоритмы Н.З. Шора.  $r$ -алгоритмы базируются на процедуре наискорейшего спуска в преобразованном пространстве переменных и обеспечивают монотонность (или почти монотонность) по значениям минимизируемой функции.  $r$ -алгоритмы используют операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов, которая улучшает свойства овражной функции в преобразованном пространстве переменных.

Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция от  $n$  переменных,  $\alpha > 1$ .  $r(\alpha)$  – алгоритмом минимизации  $f(x)$  называется итеративная процедура построения последовательностей векторов  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  и матриц  $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$  по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{P B_k^T g_f(x_k) P}, \quad h_k = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k), \quad (18)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{P B_k^T r_k P}, \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1. \quad (19)$$

Здесь  $x_0$  – начальное приближение,  $B_0 = I_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица (в качестве матрицы  $B_0$  часто выбирают диагональную матрицу  $D_n$  с положительными элементами на диагонали, с помощью которой осуществляется

масштабирование переменных),  $h_k$  – шаговый множитель (определяется из условия минимума функции в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных),  $\alpha$  – коэффициент растяжения пространства,  $R_\beta(\eta) = I_n + (\beta - 1)\eta\eta^T$  – оператор «сжатия» пространства

субградиентов в нормированном направлении  $\eta$  с коэффициентом  $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ ,

$g_f(x_k)$  и  $g_f(x_{k+1})$  – произвольные субградиенты функции  $f(x)$  в точках  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Если  $g_f(x_k) = 0$ , то  $x_k$  является точкой минимума функции  $f(x)$  и процесс (17) – (19) останавливается.

$r(\alpha)$ -алгоритм с адаптивной регулировкой шага в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных реализован в виде octave-программы `galgb5`. Программа находит приближение  $x_r^*$  к точке минимума функции  $f(x)$ . Ее название связано с тем, что пересчет матрицы  $B$  в алгоритме (17) – (19) требует  $5n^2$  арифметических операций. Программа `galgb5` позволяет находить более точные приближения  $x_r^*$ , чем известная программа `galgb4`, которая экономит  $n^2$  арифметических операций на каждой итерации [9]. Управляющие параметры в обеих программах одинаковы.

Адаптивная регулировка шага связана с приближенным поиском минимума функции по направлению и реализуется с помощью параметров  $h_0$ ,  $q_1$ ,  $n_h$ ,  $q_2$ . Здесь  $h_0$  – величина начального шага (используется на 1-й итерации, на каждой последующей итерации эта величина уточняется);  $q_1$  – коэффициент уменьшения шага ( $q_1 \leq 1$ ), если условие завершения спуска по направлению выполняется за один шаг;  $q_2$  – коэффициент увеличения шага ( $q_2 \geq 1$ ); натуральное число  $n_h$  задает число шагов одномерного спуска ( $n_h > 1$ ), через каждые из которых шаг будет увеличиваться в  $q_2$  раз. Выбор как коэффициента растяжения пространства так и параметров адаптивной регулировки шага ориентирован на то, чтобы увеличивалась точность поиска минимума функции по направлению в процессе счета и при этом число шагов по направлению не должно быть большим.

Условия завершения работы  $r(\alpha)$ -алгоритма определяются параметрами  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_g$ : он останавливается в точке  $x_{k+1}$ , если выполнено условие  $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon_x$  (останов по аргументу); или условие  $\|g_f(x_{k+1})\| \leq \epsilon_g$  (останов по норме градиента, используется для гладких функций). Аварийное завершение программы связано либо с тем, что функция  $f(x)$  неограничена снизу, либо начальный шаг  $h_0$  слишком мал и его требуется увеличить.

При минимизации негладких функций рекомендуется следующий выбор параметров:  $\alpha = 2 \div 3$ ,  $h_0 = 1.0$ ,  $q_1 = 1.0$ ,  $q_2 = 1.1 \div 1.2$ ,  $n_h = 2 \div 3$ . Если известна априорная оценка расстояния от начальной точки  $x_0$  до точки минимума  $x^*$ , то начальный шаг  $h_0$  целесообразно выбирать порядка  $R x_0 - x^*$ . При минимизации гладких функций рекомендуемые параметры такие же, за исключением  $q_1$ , их следует выбирать  $q_1 = 0.8 \div 0.95$ . Это обусловлено тем, что дополнительное измельчение шага способствует увеличению точности поиска минимума функции по направлению, что при минимизации гладких функций обеспечивает более быструю скорость сходимости. При таком выборе параметров, как правило, число спусков по направлению редко превосходит два, а за  $n$  шагов точность по функции улучшается в три-пять раз. Параметры останова  $\epsilon_x, \epsilon_g : 10^{-6} \div 10^{-5}$  при минимизации выпуклой функции (даже существенно овражной структуры) обеспечивают нахождение  $x_r^*$  со значением функции, достаточно близким к оптимальному. При этом обычно для негладких функций выполняется условие  $\frac{f(x_r^*) - f(x^*)}{|f(x^*)| + 1} : 10^{-6} \div 10^{-5}$  ( $: 10^{-12} \div 10^{-10}$  – для гладких функций), что подтверждается результатами многочисленных тестовых и реальных расчетов.

**Метод решения и тестовый эксперимент.** С помощью негладких штрафов задача (1) – (4) сводится к задаче минимизации негладкой функции

$$f(r, x, y) = r + P_1 F_1(r, x, y) + P_2 F_2(x, y) + P_3 \max\{0, -r + r_{low}\}, \quad (20)$$

где  $P_k$  – положительные штрафные коэффициенты,  $k = 1, 2, 3$ . Здесь функция  $F_1(r, x, y)$  имеет такой вид:

$$F_1(r, x, y) = \sum_{i=1}^m \max\{0, \varphi_i\} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \max\{0, \psi_{ij}\},$$

где  $\varphi_i = x_i^2 + y_i^2 - (r - r_i)^2$ ,  $\psi_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2$ , а функция  $F_2(x, y)$  имеет следующий вид:

$$F_2(x, y) = \max\{0, \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - \delta_x, -\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - \delta_x\} + \max\{0, \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i - \delta_y, -\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i - \delta_y\},$$

где  $\delta_x$  и  $\delta_y$  – заданные допуски на отклонения координат центра тяжести семейства кругов от начала координат.

Алгоритм решения задачи (1) – (4) состоит в следующем. Для заданного набора стартовых точек осуществляется поиск локальных минимумов функции  $f(r, x, y)$  с помощью программы `ralgb5`, в которой величина шага адаптивно настраивается с помощью указанных выше параметров. Наилучший из локальных минимумов функции (20), для которого штрафная часть в функции  $f(r, x, y)$  равна нулю, принимается за решение задачи (1) – (4). Стартовые точки генерируются случайным образом.

Рассматривался тестовый пример:  $m = 5$ ,  $r_1 = 0.1$ ,  $r_2 = 0.2$ ,  $r_3 = 0.3$ ,  $r_4 = 0.5$ ,  $r_5 = 0.8$ ,  $m_1 = 0.0785$ ,  $m_2 = 0.314$ ,  $m_3 = 0.7065$ ,  $m_4 = 1.9625$ ,  $m_5 = 5.024$ ,  $\delta_x = \delta_y = 0.0001$ . На рис. 2, а приведено размещение кругов, соответствующее одному из оптимальных решений задачи (1) – (3), для него  $f^* = 1.300$  и достигается оно в точке

$(r^*, x^*, y^*) = (1.300, 1.034, 0.431, 0.075, 0.833, 0.601, 0.784, -0.592, 0.538, 0.370, -0.336)$ , которая является точкой глобального минимума функции (20). На рис. 2, б приведено размещение кругов, соответствующее одному из найденных локальных минимумов задачи (1) – (4). Ему соответствует  $f^* = 1.316$  и точка локального минимума

$(r^*, x^*, y^*) = (1.316, -1.113, 0.491, -0.03, 1.116, -1.016, -0.01, -0.527, 0.623, 0.368, -0.319)$ .

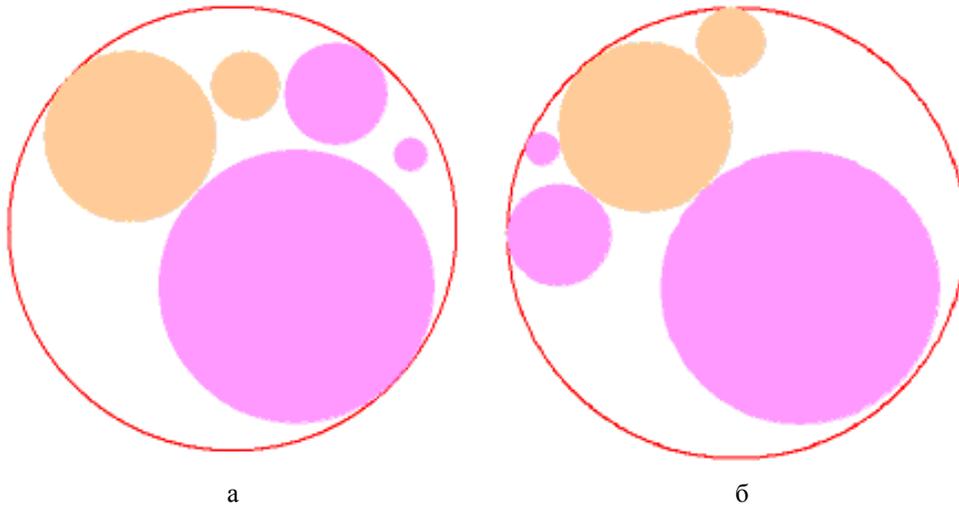


РИС. 2. Размещение объектов: а – без учета ограничений на центр тяжести, б – с учетом ограничений на центр тяжести

При расчетах использовались 20 стартовых точек, которые генерировались датчиком случайных чисел с равномерным распределением на единичном квадрате. При этом глобальный минимум задачи (1) – (3) был найден из 19 стартовых точек из 20, а наилучшее решение задачи (1)–(4) – из 3 стартовых точек.

**О числах Шеннона и Ловаса.** Задачи об оптимальной упаковке шаров тесно связаны с помехоустойчивыми кодами, или, другими словами, кодами, корректирующими ошибки при передаче информации. Это связано с двумя важными условиями, которым должна удовлетворять система кодовых слов, чтобы эти слова были надежно различимы. Первое условие означает, что соответствующие кодовым словам точки должны быть разделены некоторым минимальным «расстоянием». Евклидово расстояние служит достаточно хорошей мерой различимости соответствующих кодовых слов и описывается с помощью ограничений по подобию ограничений (3) только для  $n$ -мерного евклидова пространства. Второе условие связано с тем, что энергия, затрачиваемая на передачу отдельного кодового слова, хорошо описывается квадратичными функциями, которые означают расстояние от кодового слова до начала координат. Таким образом, задача разработки надежной системы сигналов, обеспечивающей эффективное использование энергии, сводится к геометрической задаче размещения точек внутри некоторой области пространства при дополнительном условии, означающем что точки не должны находиться слишком близко друг к другу.

Общая суть задач о помехоустойчивых кодах на языке теории графов такова. Пусть  $G$  – граф, вершинами которого являются буквы алфавита, а две вершины соединены ребром, если соответствующие этим вершинам буквы алфавита могут быть перепутаны. Тогда число устойчивости (*независимости*) графа  $G$  (его принято обозначать  $\alpha(G)$ ) определяет наибольшее количество однобуквенных сообщений, которые можно послать, не боясь их перепутать. Устойчивые (*независимые*) множества вершин в графе  $G$ , на которых достигается  $\alpha(G)$ , дают такие наборы букв алфавита, каждый из которых можно переслать, не боясь перепутать входящие в этот набор буквы. Задачи о помехоустойчивых кодах определяются конкретным алфавитом и определенным способом (правилом) перепутывания букв алфавита, а число  $\alpha(G)$  дает максимальный объем помехоустойчивого кода, который для них можно получить. Эти задачи дали теории оптимизации такие понятия, как шенноновская емкость графа  $\theta(G)$  и число Ловаса  $\vartheta(G)$  [10].

Для измерения максимальной частоты передачи информации с нулевой вероятностью ошибки К. Шеннон ввел величину  $\theta(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\alpha(G^k))^{1/k}$ , которая получила название шенноновской емкости графа  $G$ . Здесь  $G^k$  – граф, вершинами которого служат все возможные  $k$ -буквенные слова. Две вершины в графе  $G^k$  соединены ребром, если соответствующие им слова могут быть перепутаны, причем два  $k$ -буквенных слова перепутываемы, если для всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$  их  $i$ -ые буквы перепутываемы или равны. Максимальное число непереputываемых  $k$ -буквенных сообщений равно  $\alpha(G^k)$ .

Задача определения емкости графа  $\theta(G)$  оказалась очень сложной даже для небольших графов. Так, долгое время для графа в форме пятиугольника  $C_5$  (нечетный цикл, состоящий из пяти вершин) был известен только результат:  $\sqrt{5} \leq \theta(C_5) \leq 5/2$ , полученный К. Шенноном в 1956 году. И только 21 год спустя [10], Л. Ловас нашел емкость пятиугольника  $C_5$ , доказав, что полученная Шенноном нижняя оценка точная. Сделал он это с помощью числа  $\vartheta(G)$ , которое впоследствии получило название числа Ловаса\*. Для пятиугольника  $C_5$  число Ловаса  $\theta(C_5)$  равно  $\sqrt{5}$ . Для произвольного графа  $G$  число Ловаса  $\vartheta(G)$  может быть вычислено за полиномиальное время и служит верхней оценкой для числа устойчивости  $\alpha(G)$ . Когда граф  $G$  является совершенным, то  $\vartheta(G) = \alpha(G)$ , и, следовательно, число Ловаса есть точной оценкой для числа устойчивости совершенного графа.

**Заключение.** Решение многоэкстремальных квадратичных задач для проблем оптимальной упаковки неравных кругов с учетом ограничений поведения с помощью методов негладкой оптимизации представляется перспективным для параллельных вычислительных комплексов. Во-первых, субградиентные методы с преобразованием пространства легко распараллеливаются, благодаря использованию простых матрично-векторных операций. Во-вторых, существуют параллельные реализации процедуры мултистарта, когда за отдельным процессором закреплен алгоритм поиска локального экстремума из соответствующей начальной точки. Эти особенности делают предлагаемый метод перспективным для реализации в системах параллельных или распределенных вычислений различных проблем упаковки большого количества кругов или многомерных шаров.

*Е.И. Ненахов, Т.Е. Романова, П.И. Стецюк*

#### РІВНОВАЖНА УПАКОВКА КІЛ У КОЛО МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА

Розглядається проблема упаковки системи нерівних кіл у коло мінімального радіуса, так щоб центр ваги системи кіл збігався із центром зовнішнього кола. Дано два її формулювання – у вигляді квадратичної екстремальної задачі й у вигляді задачі обернено-опуклого програмування. Для пошуку локальних екстремумів запропоновано метод на основі модифікації  $r$ -алгоритма та наведено результати обчислювальних експериментів.

\* Число Ловаса совпадает с оценкой Шора для числа устойчивости графа, т. е. лагранжевой двойственной оценкой в квадратичной булевой задаче, с помощью которой формулируется задача нахождения независимого множества вершин в графе [6].

*E.I. Nenakhov, T.E. Romanova, P.I. Stetsyuk*

#### BALANCED PACKING PROBLEM OF CIRCLES IN A CIRCLE OF MINIMUM RADIUS

The paper considers a packing problem of a set of unequal circles into a containing circle of the minimum radius subject to the center of gravity of the set of circles is located at the center of the containing circle. We introduce two formulations of the packing problem: in the form of a quadratic extremal problem and, as well as, in the form of inverse-convex programming. We employ a method based on the modification of the  $r$ -algorithm for local optimization. The results of computational experiments are given.

1. Слээн Н. Дж. А. Упаковка шаров // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82.
2. Stoyan Y., Yaskov G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere // Journal of Global Optimization. – 2012. – Vol. 52, Issue 4. – P. 855–868.
3. Fasano G., Pinter J.D., eds. Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. – Springer. – New York. – 2012. – 404 p.
4. Chao Che, Yi-shou Wang, Hong-fei Teng. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. – Optimization Online. – 2008. – 11 p. [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2008/09/2093.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/09/2093.html).
5. Коваленко А.А., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений поведения системы // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1(111). – С. 106–115.
6. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. – Kluwer Academic Publishers. – 1998. – 394 p.
7. Пиеничный Б.Н., Соболенко Л.А. Метод линеаризации для обратно-выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 6. – С. 86–97.
8. Ненахов Э.И., Соболенко Л.А. Метод линеаризации и негладкая оптимизация // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 3. – С. 90–104.
9. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации  $r$ -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.
10. Lovasz L. On the Shannon capacity of a graph // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1979. – 25, N 1. – P. 1–7.

Получено 05.04.2013