Теорія оптимальних рішень

На основе подхода, связанного с растяжением времени, решается игровая задача о геометрической встрече управляемых систем высших порядков, являющаяся обобщением контрольного примера Л.С. Понтрягина. Получены условия на параметры систем, достаточные для успешного завершения игры из любых начальных состояний.

УДК 517.977

Г.Ц. ЧИКРИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНТРОЛЬНОГО ПРИМЕРА Л.С. ПОНТРЯГИНА

Постановка задачи. Пусть движение управляемых объектов описывается системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -\alpha \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \rho u, \quad x \in R^m, \tag{1}$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\beta \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \sigma v\,, \; y \in R^m, \; n \geq 2, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta,\, \rho, \sigma$ – параметры трения и ресурсов управления, соответственно, $\alpha, \beta, \rho, \sigma > 0$.

Управления u и v, $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$, выбираются преследователем и убегающим так, чтобы их реализации во времени были измеримыми по Лебегу функциями. Цель преследователя – с помощью выбора своего управления добиться встречи объектов в конечный момент времени $t : x(t) = y(t)$. В работе [1] этот пример был исследован в случае $n=2$ и выведены условия на параметры систем, при которых преследователь может достичь своей цели при любых начальных состояниях объектов. Для применения первого прямого метода [2] к решению поставленной задачи требуется выполнение условия Л.С. Понтрягина, трудно проверяемое в случае большой размерности ($n > 2$) [3]. Здесь использован подход, основанный на его модификации [4] и связанный с растяжением времени [5 – 8].

Линейная игровая задача сближения. Пусть движение конфликтно-управляемого процесса описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + u - \upsilon, \tag{3}$$

где $z \in R^m$, A- квадратная матрица. Управления u и v находятся в распоряжении преследователя и убегающего, соответственно, $u \in U$, $v \in V$, $U \subset R^m$, $V \subset R^m$, U и V – выпуклые компакты. Игрокам разрешается выбирать свои текущие управления таким образом, чтобы их реализации во времени были измеримыми по Лебегу функциями. Задано начальное положение процесса $z(0) = z_0$.

Игра рассматривается с точки зрения преследователя, который с помощью выбора своего управления $u(t)$ стремится при любом поведении убегающего вывести траекторию системы (1) на линейное подпространство $M, M \subset R^m$.

Обозначим π оператор проектирования из R^m на $M^{\perp}$. Тогда включение $\pi z(t) \in M$ равносильно окончанию игры преследования в момент t. Первый прямой метод, созданный Л.С. Понтрягиным для решения такой игры, основан на предположении, что преследователь строит свое управление по текущему управлению убегающего, вследствие чего условие преимущества преследователя над убегающим в ресурсах управления выглядит следующим образом.

Условие Л.С. Понтрягина [1]: $\pi e^{tA} \overset{*}{-} U \pi e^{tA} V \neq \varnothing \quad \forall\, t \geq 0$. Его модификация (см. условие далее), предполагает построение управления преследователя по управлению убегающего в прошлом, как если бы информация об управлении убегающего поступала к нему не сразу, а с переменным запаздыванием информации, выраженным через функцию растяжения времени.

Определение [4, 6]. Функцией растяжения времени назовем неотрицательную, монотонно возрастающую, абсолютно-непрерывную функцию $I(t),\ t \in [0, +\infty)$, такую, что $I(0) = 0,\ I(t) \geq t$ при $t > 0$.

Замечание. Требование абсолютной непрерывности функции $I(t)$ может быть ослаблено [8], однако здесь в этом нет необходимости. Условие дифференцируемости $I(t)$ [4] ограничивает круг возможных приложений [6 – 8].

Условие (преимущества с растяжением) [4]. Существует функция растяжения времени $I(t)$, удовлетворяющая условию:

$$W(t) = \pi e^{tA} U \overset{*}{-} \dot{I}(t) \pi e^{I(t)A} V \neq \varnothing \quad \forall\, t \geq 0. \tag{4}$$

Теорема [4]. Пусть выполнено условие (4) и для некоторого конечного момента времени t_1 выполнено включение

$$-\pi\left(e^{I(t_1)A} z_0 + \int_0^{I(t_1)-t_1} e^{(I(t_1)-\vartheta)A} U d\theta\right) \cap \int_0^{t_1} W(\theta) d\theta \neq \varnothing. \tag{5}$$

Тогда из состояния z_0 преследование может быть завершено в момент $I(t_1)$. Отметим, что здесь интегралы от множеств понимаются в смысле Аумана [9].

Вернемся к исходной задаче о встрече управляемых объектов (1), (2). Приведем уравнения высших порядков (1), (2) к системам уравнений первого порядка. Для этого сделаем замену переменных:

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1, \ldots, x_n = \dot{x}_{n-1},\ y_1 = y, y_2 = \dot{y}_1, \ldots, y_n = \dot{y}_{n-1}.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$z = \left(x_1^T, x_2^T, \ldots x_n^T, y_1^T, y_2^T, \ldots y_n^T \right)^T.$$

Задача о встрече управляемых объектов (1), (2), таким образом, сводится к игровой задаче сближения для конфликтно-управляемого процесса (3), где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O_{mn} \\ O_{mn} & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E \\ O & O & \ldots & O & -\alpha E \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E \\ O & O & \ldots & O & -\beta E \end{pmatrix},$$

Выше использовались обозначения E и O для единичной и нулевой m-мерных матриц, соответственно, и O_{mn} – для нулевой mn-мерной матрицы.

Множества управлений представимы в виде

$$U = \Big(\underbrace{O \ldots O}_{n-1} \rho S \underbrace{O \ldots O}_{n} \Big)^T, \quad V = \Big(\underbrace{O \ldots O}_{n} \underbrace{O \ldots O}_{n-1} \sigma S \Big)^T,$$

где $S = \{ x, x \in R^n : \|x\| \le 1 \}$.

Преследователь с помощью выбора своего управления стремится из заданного начального положения $\left(x_0^T, \dot{x}_0^T, \ldots \left(x_0^{(n-1)} \right)^T, y_0^T, \dot{y}_0^T, \ldots \left(y_0^{(n-1)} \right)^T \right)^T$ вывести траекторию системы (3) в конечный момент времени на терминальное множество

$$M = \left\{ z = \left(x_1^T, x_2^T, \ldots x_n^T, y_1^T, y_2^T, \ldots y_n^T \right)^T, x_i \in R^m, y_i \in R^m : x_1 = y_1 \right\}.$$

Роль оператора проектирования здесь играет матрица

$$\pi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} E \quad O \quad \ldots \quad O \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} E \quad O \quad \ldots \quad O \right).$$

Введем обозначения для функций:

$$\phi_1(t) = e^{-\alpha t},\ \phi_k(t) = \int_0^t \phi_{k-1}(\theta) d\theta,\ \psi_k(t) = \int_0^t \psi_{k-1}(\theta) d\theta, \quad k = 2, \ldots n. \tag{6}$$

Фундаментальная матрица системы (3) здесь имеет вид:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & O_{mn} \\ O_{mn} & e^{tA_2} \end{pmatrix},$$

$$e^{tA_1} = \begin{pmatrix} E & tE & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}E & \phi_n(t)E \\ O & E & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}E & \phi_{n-1}(t)E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E & \phi_2(t)E \\ O & O & \dots & O & \phi_1(t)E \end{pmatrix}, \; e^{tA_2} = \begin{pmatrix} E & tE & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}E & \psi_n(t)E \\ O & E & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}E & \psi_{n-1}(t)E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E & \psi_2(t)E \\ O & O & \dots & O & \psi_1(t)E \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что

$$\pi e^{tA}U = \rho\phi_n(t)S, \;\; \pi e^{tA}V = \sigma\psi_n(t)S. \quad (8)$$

Пусть $\alpha > \beta$. Тогда функция $I(t) = \frac{\alpha}{\beta}t$ удовлетворяет всем условиям, перечисленным в определении функции растяжения времени. Кроме того, для нее выполнены равенства

$$\psi_i(I(t)) = \frac{\alpha^{i-1}}{\beta^{i-1}}\phi_i(t), \quad i = 1,\dots n. \quad (9)$$

Отсюда, в силу (8), имеем

$$\frac{1}{\sigma}\pi e^{I(t)A}V = \frac{1}{\rho}\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}\pi e^{tA}U. \quad (10)$$

Из этого включения, с учетом того, что $\dot{I}(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, следует, что для выполнения условия (4) достаточно, чтобы параметры систем (1), (2) удовлетворяли неравенствам:

$$\alpha > \beta, \qquad \frac{\rho}{\alpha^n} \geq \frac{\sigma}{\beta^n}. \quad (11)$$

Опишем способ построения управления преследователя, приводящего к цели. На начальном отрезке времени $[0, \tau_0)$, $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, полагаем: $u^0(\theta) \equiv 0$. Пусть $\omega(\theta)$ – измеримый селектор многозначного отображения $W(\theta)$, при котором $-\pi e^{I(t_1)A}z_0 = \int_0^{t_1}\omega(\theta)d\theta$ (5). В каждый текущий момент времени $\tau_0 + t$, $0 \leq t \leq t_1$, управление преследователя строится в виде измеримого решения уравнения, существующего ввиду теоремы Филиппова – Кастена [9]:

$$\pi e^{(t_1-t)A}u(\tau_0 + t) = \dot{I}(t_1 - t)\pi e^{I(t_1-t)A}v(I(t_1) - I(t_1 - t)) + \omega(t_1 - t). \quad (12)$$

Из соотношения (5), с учетом формул (10), (11), вытекает, что если для начальных положений $\left(x_0, \dot{x}_0, \dots x_0^{(n-1)}\right)$, $\left(y_0, \dot{y}_0, \dots y_0^{(n-1)}\right)$ найдется момент t_1, при котором норма вектора $\left\{\pi z\left(I\left(t_1\right)\right)\right\}_1$, состоящего из первых n координат вектора $\pi z\left(I\left(t_1\right)\right)$, удовлетворяет условию:

$$\left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\| \leq R(t), \tag{13}$$

где $R(t) = \left(\rho - \frac{\alpha^n}{\beta^n}\sigma\right)\int\limits_0^{t_1}\phi_n(\theta)d\theta$, то преследователь может достичь своей цели точно в момент времени $I\left(t_1\right)$.

Оценим $\left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\|$, используя (7) и явный вид функции $I(t)$.

$$\left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\| \leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right)^{i-1}}{(i-1)!}\left(\left\|y_i^0\right\| + \left\|x_i^0\right\|\right) + \left(\psi_n\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right)\left\|y_n^0\right\| + \phi_n\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right)\left\|x_n^0\right\|\right).$$

Отсюда, ввиду (6), следует, что для любого наперед заданного малого числа ε найдутся момент времени $\overline{t}(\varepsilon)$, такой, что при $t \geq \overline{t}(\varepsilon)$ $\left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\| - P^{n-2}(t) \leq -\varepsilon$, где $P^{n-2}(t) -$ некоторый положительный полином $(n-2)$-ой степени ε, момент времени $\overline{\overline{t}}(\varepsilon)$, такой, что при $t \geq \overline{\overline{t}}(\varepsilon)$ $P^{n-2}(t) - P^{n-1}(t) \leq -\varepsilon$, где $P^{n-1}(t) -$ положительный полином $(n-1)$-ой степени, а также момент $\overline{\overline{\overline{t}}}(\varepsilon)$, такой, что при $t \geq \overline{\overline{\overline{t}}}(\varepsilon)$ $P^{n-2}(t) - R(t) \leq \varepsilon$. Поэтому при $t \geq t_1$, где $t_1 = \max\left\{\overline{t}, \overline{\overline{t}}, \overline{\overline{\overline{t}}}\right\}$,

$$\left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\| - R(t) = \left\|\left\{\pi z\left(I(t)\right)\right\}_1\right\| - P^{n-2}(t) + P^{n-2}(t) - P^{n-1}(t) + P^{n-1}(t) - R(t) \leq -\varepsilon$$

и, следовательно, в момент t_1 выполнится условие (13).

Итак, если параметры систем (1), (2) удовлетворяют условиям (11), то при любых начальных состояниях $\left(x_0^T, \dot{x}_0^T, \dots (x_0^{(n-1)})^T\right)^T$, $\left(y_0^T, \dot{y}_0^T, \dots (y_0^{(n-1)})^T\right)^T$ преследователь, выбирая управление вышеописанным способом (12), осуществит в момент $I\left(t_1\right)$ встречу конфликтно-управляемых объектов (1), (2) при произвольном допустимом управлении своего противника.

Следует отметить, что в каждый текущий момент времени $\tau_0 + t$, $0 \leq t \leq t_1$, управление преследователя строится по управлению убегающего в момент $\tau_0 + t - \left(I\left(t_1\right) - I(t_1 - t)\right)$ (12), как если бы информация о текущем управлении противника поступала преследователю с зависящим от времени запаздыванием $\tau(\tau_0 + t) = I\left(t_1\right) - I\left(t_1 - t\right)$.

Г.Ц. Чикрій

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ КОНТРОЛЬНОГО ПРИКЛАДУ Л.С. ПОНТРЯГІНА

На базі підходу, пов'язаного з розтягуванням часу, вирішується ігрова задача про зустріч керованих систем вищих порядків, яка є узагальненням контрольного прикладу Л.С. Понтрягіна. Отримано умови на параметри систем, що є достатніми для успішного завершення гри при довільних початкових умовах.

G.Ts. Chikrii

ON ONE GENERALIZATION OF PONTRYAGIN'S MODEL EXAMPLE

The game problem of meeting of two higher-order controlled objects, beeng a generalization of Pontryagin's model example, is solved on the basis of time-dilatation approach. Conditions on the systems parameters, sufficient for the game termination under all initial states, are derived.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – 2. – 576 с.
2. *Никольский М.*С. О применении первого прямого метода Понтрягина // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. – 1972. – № 10. – С. 51 – 56.
3. *Chikrii A.* Conflict-Controlled Processes. – Dortrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 403 p.
4. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – 208. – № 3. – С. 520–523.
5. *Chikrii G.Ts*. Using the impact of information delay for solution of game problems of pursuit // Доп. НАН України. Сер. математики. – 1999. – N 12. – С. 111 – 117.
6. *Чикрий Г.Ц.* Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 90 – 105.
7. *Чикрий Г.Ц.* Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 5 – 12.
8. *Чикрий Г.Ц.* Об одной игровой задаче мягкой встречи двух разнотипных объектов // Теорія оптимальних рішень. – 2011. – № 10. – С. 31–37.
9. *Йоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Получено 20.02.2013