

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Розглядається проблема упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсів у прямокутному контейнері мінімальної площі (або периметра). Наведено її формулювання у вигляді багатоекстремальної задачі нелінійного програмування. Для пошуку локальних екстремумів запропоновано два алгоритми: з використанням IPOPT та модифікації r-алгоритму. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

© П.І. Стецюк, Т.Є. Романова,
І.О. Субота, 2014

Теорія оптимальних рішень. 2014

УДК 519.8

П.І. СТЕЦЮК, Т.Є. РОМАНОВА, І.О. СУБОТА

НLP-ЗАДАЧА УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧНИХ ЕЛІПСІВ У ПРЯМОКУТНИЙ КОНТЕЙНЕР*

Вступ. Задачі оптимального розміщення еліпсів у контейнері мінімальних розмірів відносяться до класу задач упаковки та розкрою (Packing & Cutting, [1]), які мають широкий спектр наукових та практичних застосувань. Зокрема, задачі упаковки еліпсів виникають у порошковій металургії, молекулярній динаміці, мінеральній промисловості та багатьох інших. Одне з важливих застосувань – моделювання руху сипучих речовин.

Тривалий час як математичні моделі гранульованих матеріалів розглядалися круги. Однак отримані у такий спосіб математичні моделі суттєво відрізнялися від реальних моделей. У роботах [2, 3] для розв'язання задач даного типу застосовується метод дискретного елемента. Цей метод є поширеним інструментом для розв'язання багатьох виробничих задач, однак він – трудомісткий, що обмежує вимірність задачі і кількість використовуваних частинок.

У роботах [4, 5] моделюється випадкова упаковка еліпсоїдів і досліджується щільність отриманої упаковки. Доведено, що еліпсоїди можуть бути упаковані щільніше, ніж кулі. При моделюванні випадкового розміщення еліпсів у контейнері, досягнутий максимальний коефіцієнт щільності 0,895 [6].

У даній роботі розглядаються алгоритми розв'язання задачі оптимальної упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсів у контейнер прямокутної форми.

*Робота підтримана спільним грантом НАНУ та НТЦУ (проект № 5710).

Постановка задачі та математична модель. Маємо сімейство гомотетичних однаково орієнтованих еліпсів E_i , $i=1, \dots, n$, які задані довжинами великої і малої напівосей a_i та b_i . Таким чином, для кожної пари еліпсів E_i та E_j справедливо співвідношення $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$, $i \neq j \in I_n = \{1, \dots, n\}$.

Вважаємо, що початок власної системи координат еліпса E_i знаходиться в центрі його симетрії.

Положення еліпса E_i у просторі \square^2 характеризується вектором трансляції $v_i = (x_i, y_i) \in \square^2$, де \square^2 – арифметичний евклідів простір.

Контейнер Ω визначається як прямокутна область $\Omega = \{(x, y) \in \square^2, -A \leq x \leq A, -B \leq y \leq B\}$ змінної довжини A та змінної ширини B . Позначимо $p = (A, B)$ вектор змінних контейнера Ω .

Як цільова функція F розглядається напівпериметр контейнера Ω – $F = A + B$ або площа контейнера – $F = A \cdot B$.

Задача оптимальної упаковки еліпсів полягає у наступному. Сімейство еліпсів E_i , $i=1, \dots, n$, які не перетинаються, потрібно розмістити у контейнері Ω так, щоб цільова функція F досягала свого мінімального значення.

Нехай вектор змінних задачі має вигляд $u = (p, v_1, v_2, \dots, v_n) \in \square^{2n+2}$. Математична модель задачі в термінах phi-функцій формулюється у вигляді [7]: знайти

$$\min_{u \in W \subset \square^{2n+2}} F(u), \tag{1}$$

де

$$W = \{u \in \square^{2n+2} : \Phi_\tau(u) \geq 0, \Phi_i^*(u) \geq 0, \tau = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n\}, \tag{2}$$

а відповідні phi-функції мають наступний вигляд:

$$\Phi_\tau = \frac{(x_i - x_j)^2}{(a_i + a_j)^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{(b_i + b_j)^2} - 1, \quad i < j = 1, \dots, n,$$

$$\Phi_i^* = \min\{\chi_i^1, \chi_i^2, \chi_i^3, \chi_i^4\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

де

$$\chi_i^1 = -x_i + A - a_i, \quad \chi_i^2 = -y_i + B - b_i, \quad \chi_i^3 = x_i + A - a_i, \quad \chi_i^4 = y_i + B - b_i,$$

а $m = 0.5 \cdot (n-1)n$ визначає повну кількість функцій Φ_τ , які задають умови, що еліпси не перетинаються.

Задача (1), (2) – багатоекстремальна задача нелінійного програмування, де цільова функція або лінійна, або квадратична. Множина допустимих розв'язків задається квадратичними та кусочно-лінійними функціями. Для пошуку локальних екстремумів задачі (1), (2) розглянемо два алгоритми: перший

використовує модифікацію r -алгоритму Шора, а другий – відому програму ПРОРТ.

Алгоритм 1. Для напівпериметра контейнера задачі оптимальної упаковки еліпсів відповідає наступна задача нелінійного програмування:
знайти

$$F^* = \min_{x,y,A,B} (A+B), \quad (3)$$

при обмеженнях

$$\frac{(x_i - x_j)^2}{(a_i + a_j)^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{(b_i + b_j)^2} \geq 1, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (4)$$

$$-A \leq x_i - a_i, \quad x_i + a_i \leq A, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$-B \leq y_i - b_i, \quad y_i + b_i \leq B, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

За допомогою негладких штрафів задача (3) – (6) зводиться до задачі безумовної мінімізації негладкої функції

$$\min_{A,B,x,y} \{f(A, B, x, y) = (A+B) + \Phi_P(r, x, y)\}, \quad (7)$$

де штрафна негладка функція $\Phi_P(A, B, x, y)$ має вигляд

$$\Phi_P(A, B, x, y) = P_1 F_1(x, y) + P_2 F_2(A, B, x, y). \quad (8)$$

Тут P_k – додатні штрафні коефіцієнти, $k=1, 2$, а функції $F_1(x, y)$ та $F_2(A, B, x, y)$ визначаються так:

$$F_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \max\left\{0, -\frac{(x_i - x_j)^2}{(a_i + a_j)^2} - \frac{(y_i - y_j)^2}{(b_i + b_j)^2} + 1\right\},$$

$$F_2(A, B, x, y) = \sum_{i=1}^n \max\{0, -x_i - A + a_i\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, -y_i - B + b_i\} + \\ + \sum_{i=1}^n \max\{0, x_i - A + a_i\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, y_i - B + b_i\}.$$

Використання в (8) штрафних коефіцієнтів P_k , $k=1, 2$, дозволяє врахувати більшу точність для виконання квадратичних обмежень (4) та меншу точність для виконання лінійних обмежень (5), (6). Це дає можливість раціонально керувати знаходженням близьких до граничних екстремальних точок із множини допустимих розв'язків у задачі (3) – (6).

Алгоритм пошуку найкращого розв'язку задачі (3) – (6) полягає у наступному. Для заданого набору стартових точок здійснюється пошук локальних мінімумів в задачі (7) за допомогою модифікації r -алгоритму [8].
Найкращий із

локальних мінімумів функції $f(A, B, x, y)$, для якого штрафна функція $\Phi_P(A, B, x, y)$ близька до нуля, приймається за (A_r, B_r, x_r, y_r) – розв’язок задачі (3) – (6). Йому відповідає найкраще (рекордне) значення цільової функції $F_r = A_r + B_r$ – найменший напівпериметр прямокутника, який реалізується для його довжини A_r та його ширини B_r . Стартові точки генеруються випадковим чином у прямокутнику розмірів (A_r, B_r) , які послідовно уточнюються за мірою знаходження кращого локального мінімуму.

Програмна реалізація алгоритму виконана на некомерційній мові GNU Octave [9]. Програма або знаходить один з локальних мінімумів у задачі (1), (2), або повідомляє про неможливість знайти допустиму точку для системи обмежень (2). Ядром програми є octave-функція `galgb5`, яка реалізує r -алгоритм з постійною величиною коефіцієнта розтягу простору та адаптивним регулюванням кроку в напрямку нормованого антисубградієнта. Це регулювання спрямоване на збільшення точності пошуку мінімуму функції за напрямком у процесі обчислень. При цьому, як правило, гарантується, що середнє (по ітераціях) число кроків не перевищує двох-трьох.

Для мінімальної площі контейнера алгоритм 1 буде аналогічним.

Алгоритм 2. Суть алгоритму полягає у побудові стартових точок і використанні ІРОРТ для локальної оптимізації. Як локально-оптимальний розв’язок вибирається найкращий із отриманих локальних екстремумів. Алгоритм 2, використовує метод, запропонований у [10] для розміщення кіл у смугі мінімальної довжини.

Виберемо розміри прямокутника $A = A_0, B = B_0$, які гарантують розміщення еліпсів E_i у прямокутнику Ω_0 . При цьому, не втрачаючи загальності, вважаємо, що $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$. Розміщення еліпсів визначається вектором трансляції $v_i = (x_i, y_i)$. Нехай коефіцієнти гомотетії λ_i еліпсів E_i , $i \in I_n$, являються змінними і формують вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Тоді $u = (v, \lambda) \in \mathbb{R}^{3n}$ – вектор змінних.

Крок 1. Вибираємо точку $u^{0(1)} = (v^0, 0) = (v^0, 0, \dots, 0)$, де v^0 генерується випадково, так що $v_i^0 \in \Omega_0$, $i \in I_n$.

Як стартову точку для подальшої оптимізації вибираємо $u^{0(1)}$ і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Розв’язуємо задачу

$$\max_{u \in W' \subset \mathbb{R}^{3n}} \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i, \quad (9)$$

$$W' = \{u \in \mathbb{R}^{3n} : \Phi_\tau(u) \geq 0, \Phi_i^*(u) \geq 0, \tau = 1, \dots, m, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}. \quad (10)$$

В результаті отримуємо точку глобального максимуму $u^{0(2)} = (v^{0(2)}, \lambda^{0(2)})$.

Як стартову точку для подальшої оптимізації вибираємо $u^{0(2)}$ і переходимо до кроку 3.

Крок 3. Знаходимо $u^{0(3)} = (A^{0(3)}, B^{0(3)}, v^{0(3)})$ – точку локального мінімуму задачі (1, 2).

Крок 4. Зменшуємо розміри еліпсів E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, вважаючи коефіцієнти гомотетії рівними $\lambda_i = 1 - \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Як стартову точку для подальшої оптимізації вибираємо $u^{0(3)}$ і переходимо до кроку 3, розв'язуючи задачу (1), (2) для еліпсів з розмірами $a_i = \lambda_i a_i, \tilde{b}_i = \lambda_i b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Отримуємо точку локального мінімуму $u^{0(4)} = (A^{0(4)}, B^{0(4)}, \tilde{v}^{0(4)})$.

Крок 5. Як стартову точку для подальшої оптимізації вибираємо точку $(\tilde{v}^{0(4)}, \lambda)$, де $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ для зафіксованих розмірів області $A = A^{0(4)}$, $B = B^{0(4)}$. Розв'язуємо задачу (9), (10) та отримуємо точку локального максимуму $u^{0(5)} = (v^{0(5)}, \lambda^{0(5)})$.

Крок 6. Як стартову точку для подальшої оптимізації вибираємо точку $u^{0(5)} = (v^{0(5)}, \lambda^{0(5)})$ для зафіксованих розмірів області $A = A^{0(4)}$, $B = B^{0(4)}$ та розв'язуємо наступну задачу:

$$\max_{u \in W} \sum_{i=1}^n (a_i \lambda_i)^2, \quad (11)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^{3n} : \Phi_\tau(u) \geq 0, \Phi_i(u) \geq 0, \tau = 1, \dots, m, a^- \leq a_i \lambda_i \leq a^+, i = 1, \dots, n\}, \quad (12)$$

$$a^- = \min\{a_i, i = 1, \dots, n\}, \quad a^+ = \max\{a_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Отримуємо точку локального максимуму $u^{0(6)} = (v^{0(6)}, \lambda^{0(6)})$.

Крок 7. Ранжируємо за зменшенням $a_i = \lambda_i^{0(6)} a_i$, $i = 1, \dots, n$. Формуємо послідовність $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n)$, таку, що $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_{n-1}} \geq a_{i_n}$.

Здійснюємо порівняння a_i і a_{i_j} : якщо $\lambda_i^{0(6)} \geq 1$, то вважаємо $\lambda_{i_j}^{0(7)} = 1$, якщо $\lambda_i^{0(6)} < 1$, то вважаємо $\lambda_{i_j}^{0(7)} = \lambda_i^{0(6)}$. Формуємо точку $u^{0(7)} = (v^{0(7)}, \lambda^{0(7)})$ та переходимо до кроку (2). Стартуючи з точки $u^{0(7)}$, розв'язуємо задачу

(9), (10). В результаті отримуємо точку глобального максимуму $u^{0(2)} = (v^{0(2)}, \lambda^{0(2)})$. Переходимо до кроку 3. Стартуючи з точки $u^{0(2)}$, розв'язуємо задачу (1), (2) та отримуємо точку локального мінімуму $u^* = (A^*, B^*, v^*)$.

Обчислювальні експерименти. В табл. 1 наведено результати експериментів по знаходженню мінімального напівпериметра прямокутного контейнера для десяти еліпсів, довжини осей яких наведено в колонках 2 та 3. Розглядалися три варіанти розв'язання задачі (1), (2): варіант 1 означає, що задача (1), (2) розв'язувалась за допомогою програми IPOPT [11, 12], стартуючи з 50 випадкових точок; варіант 2 – для розв'язання задачі (7), (8) використовувався алгоритм 1 з генерацією за його правилом 50 випадкових точок; варіант 3 – використовувався алгоритм 2, стартуючи з 50 випадкових точок (для локальної оптимізації в задачах (1), (2), (9), (10), (11), (12) використовувалася програма IPOPT).

ТАБЛИЦЯ 1. Найкращі розміщення десяти еліпсів для трьох варіантів

№	a_i	b_i	Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3	
			x_i^*	y_i^*	x_i^*	y_i^*	x_i^*	y_i^*
1	9	3	20.994	20.633	-20.999	29.253	21.000	-1.665
2	18	6	-11.933	25.246	11.999	-5.816	-10.680	-5.921
3	6	2	23.997	0.732	-23.999	-30.252	-24.000	-12.578
4	12	4	-18.000	-8.869	-17.999	22.324	-18.000	-8.856
5	30	10	0.000	-21.522	0.000	9.675	0.000	-21.523
6	9	3	-20.825	-1.417	-20.613	-10.168	21.000	20.634
7	18	6	10.673	-5.922	10.653	26.098	-12.000	25.193
8	6	2	23.998	-12.576	23.469	19.058	-24.000	0.7344
9	12	4	17.280	27.523	-17.618	-3.130	17.190	27.521
10	30	10	0.000	9.677	0.0000	-21.308	0.000	9.679
			A* = 30.000 B* = 32.253 F* = 62.253		A* = 30.000 B* = 31.523 F* = 61.523		A* = 30.000 B* = 31.523 F* = 61.523	

Найменше значення цільової функції $F^* = 61.523$ отримано як за допомогою алгоритму 1, так і за допомогою алгоритму 2. Отримані розв'язки відрізняються тільки антисиметричним розміщенням еліпсів другого знизу шару, який включає п'ять еліпсів (див. рисунок, варіант 2 та варіант 3). Для варіанта 1 коефіцієнт заповнення дорівнює 0.80359, а для варіанта 2 та варіанта 3 – дорівнює 0.8222.

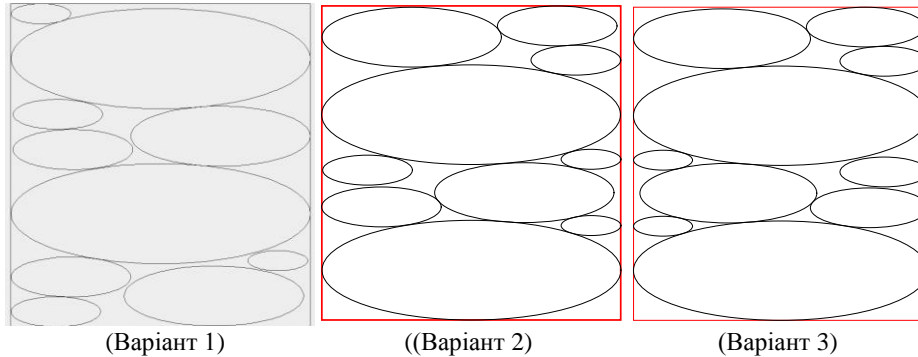


РИСУНОК. Розміщення еліпсів, що відповідають трьом варіантам із табл. 1
 У табл. 2 наведено координати розміщення 20 еліпсів, довжини осей яких наведено в колонках a_i та b_i . Для цього прикладу довжина та ширина контейнера дорівнюють $A^* = 22.7719$ та $B^* = 20.3749$. Їм відповідає напівпериметр $F^* = 43.1468$ та коефіцієнт заповнення рівний 0.79343 . Цей локально оптимальний розв'язок отримано за допомогою алгоритму 2.

ТАБЛИЦЯ 2. Параметри розміщення 20 еліпсів, що відповідають найкращому, отриманому алгоритмом 2, локально оптимальному розв'язку

№	a_i	b_i	x_i^*	y_i^*	№	a_i	b_i	x_i^*	y_i^*
1	10.5	3.5	-12.2720	-11.9589	11	8.25	2.75	14.5220	2.0637
2	10.5	3.5	-12.2720	9.8688	12	8.25	2.75	14.5220	-13.6846
3	10.5	3.5	5.4661	-8.2119	13	7.5	2.5	13.3586	17.8750
4	10.5	3.5	11.9955	8.2567	14	7.5	2.5	-15.0125	0.0595
5	9.0	3.0	-13.7720	-5.4782	15	7.5	2.5	-15.2720	-17.8750
6	9.0	3.0	1.1984	-17.3552	16	7.5	2.5	15.2720	-3.1804
7	9.0	3.0	-13.7720	16.3495	17	6.0	2.0	16.7720	-18.3750
8	9.0	3.0	-1.9903	3.7272	18	6.0	2.0	-0.0578	18.3750
9	8.25	2.75	2.5325	13.7041	19	6.0	2.0	-16.7720	4.5773
10	8.25	2.75	-0.0657	-1.9869	20	6.0	2.0	16.7720	13.5212

Висновок. Математична модель задачі оптимальної упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсів у прямокутний контейнер представлена як багатоекстремальна задача нелінійного програмування. Для пошуку її локальних екстремумів запропоновано два алгоритми. Перший використовує r -алгоритм Шора в сполученні із процедурою мультистарту. Другий алгоритм використовує відому програму IPOPT та спеціальний спосіб побудови стартових точок. Ефективність алгоритмів підтверджується розрахунками для тестових задач, де знайдено розміщення еліпсів з досить щільною їх упаковкою.

Розглянуті у роботі алгоритми для задачі оптимальної упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсів можуть бути застосовані для розробки ефективних методів розв'язання задач розміщення еліпсів, які допускають неперервні повороти.

П.І. Стецюк, Т.Є. Романова, І.А. Суббота

NLP-ЗАДАЧА УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧНЫХ ЭЛЛИПСОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ КОНТЕЙНЕР

Рассматривается проблема упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсов в прямоугольном контейнере минимальной площади (или периметра). Дана ее формулировка в виде многоэкстремальной задачи нелинейного программирования. Для поиска локальных экстремумов предлагаются два алгоритма: с использованием IPOPT и модификации r -алгоритма. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

P.I. Stetsyuk, T.E. Romanova, I.A. Subota

NLP-PROBLEM OF PACKING HOMOTHETIC ELLIPSES INTO A RECTANGULAR CONTAINER

The paper considers a packing problem of a finite set of homothetic ellipses into a rectangular container of the minimal perimeter (area). We formulate the problem in the form of a multiextremal nonlinear programming one. In order to search for local extrema of the problem we propose two algorithms. One algorithm uses IPOPT and the other algorithm based on a modification of the r -algorithm. The results of computational experiments are given.

1. *Wascher G., Hauner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research.* – 2007. – **183** (3). – P. 1109 – 1130.
2. *Ting J., Khwaja M., Meachum L., Rowell J.* An ellipse-based discrete element model for granular materials // *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* – 1993. – **17** (9). – P. 603 – 623.
3. *Feng Y., Han K. and Owen D.* An Advancing Front Packing of Polygons, Ellipses and Spheres // *Discrete Element Methods.* – 2002. – P. 93 – 98.
4. *Donev A., Cisse I., Sachs D., Variano E.A., Stillinger F.H., Connelly R., Torquato S., Chaikin P.M.* Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids // *Science.* – 2004. – **303**(5660). – P. 990 – 993.
5. *Man W., Donev A., Stillinger F., Sullivan M., Russel W., Heeger D., Inati S., Torquato S., Chaikin P.M.* Experiments on random packings of ellipsoids // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – **94** (19).
6. *Delaney G., Weaire D., Hutzler S., Murphy S.* Random packing of elliptical disks // *Philosophical Magazine Letters.* – 2005. – **85**(2). – P. 89 – 96.
7. *Романова Т.Є., Суббота І.А., Стецюк П.І.* Задача упаковки гомотетичних еліпсів в прямокутному контейнері мінімальних розмірів // *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: материалы 4-й Междунар. науч. конф. (Кишинэу, 25 – 28 марта 2014).* – Кишинэу: Эврика, 2014. – С. 396 – 405.
8. *Шор Н.З., Стецюк П.І.* Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // *Кибернетика и системный анализ.* – 1997. – № 4. – С. 28 – 49.

9. *Octave* [Електронний ресурс]: <http://www.octave.org>. – Режим доступу: вільний.
10. *Стоян Ю.Г., Яськов Г.Н.* Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины // Доп. НАН України. – 2013. – № 5. – С. 44 – 50.
11. *Wachter A., Biegler L.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Mathematical Programming*. – 2006. – **106**(1). – P. 25 – 57.
12. *ІРОПТ* [Електронний ресурс]: <https://projects.coin-or.org/Ipopt>.

Одержано 07.04.2014