УДК 517.977.56

М.М. КОПЕЦ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления процессом колебаний струны. Для этой задачи, используя метод множителей Лагранжа, получены необходимые условия оптимальности. Из этих условий выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати. Решение полученной системы представлено в замкнутой форме.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$I(u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)d\,x+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 d\,x+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt \qquad (1)$$

на решениях краевой задачи

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+u(t,x), \qquad (2)$$

$$z(t_0,x)=f(x),\ \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x), \qquad (3)$$

$$z(t,0)=0,\ z(t,l)=0, \qquad (4)$$

где $0\le x\le l$, $t_0\le t\le t_1$, числа a, $t_0\ge 0$, $t_1\succ t_0$, $l\succ 0$ и функции $f(x)\in L_2(0,l)$, $g(x)\in L_2(0,l)$ заданы. Рассмотрим следующее множество:

$$\Omega=\{(t,x): t\in[t_0,t_1], x\in[0,l]\}.$$

Функция $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Для фиксированного допустимого управления $u(t,x)$ решением $z(t,x)$ задачи (2) – (4) считается обобщенное решение $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустимое управление, на котором реализуется минимум функционала (1), называется оптимальным управлением. Применяя метод множителей Лагранжа [1, с. 31], приходим к такому утверждению.

Теорема 1. Для нахождения оптимального управления $u(t,x)$ в задаче оптимизации (1) – (4) имеем следующую систему соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} = y(t,x),\ \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x), \\ z(t_0,x) = f(x),\ y(t_0,x) = g(x), \\ z(t,0) = 0,\ z(t,l) = 0,\ y(t,0) = 0,\ y(t,l) = 0, \\ \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -a^2 \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2} - z(t,x),\ \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t} = -p(t,x), \\ p(t_1,x) = z(t_1,x),\ q(t_1,x) = y(t_1,x), \\ p(t,0) = 0,\ p(t,l) = 0,\ q(t,0) = 0,\ q(t,l) = 0, \\ u(t,x) + q(t,x) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где функции $p(t,x)$ и $q(t,x)$ – множители Лагранжа.

Предположение о существовании зависимостей

$$p(t,x) = \int_0^l \left[R_{11}(t,x,s) z(t,s) + R_{12}(t,x,s) y(t,s) \right] ds,\ q(t,x) =$$

$$= \int_0^l \left[R_{21}(t,x,s) z(t,s) + R_{22}(t,x,s) y(t,s) \right] ds$$

приводит к такому выводу.

Теорема 2. Функции $R_{ij}(t,x,s), i = 1,2,\ j = 1,2,$ являются решением нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial R_{11}(t,x,s)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 R_{12}(t,x,s)}{\partial s^2} + a^2 \frac{\partial^2 R_{21}(t,x,s)}{\partial x^2} -$$

$$-\int R_{12}(t,x,\lambda) R_{21}(t,\lambda,s) d\lambda + \delta(x-s) = 0,$$

$$\frac{\partial R_{12}(t,x,s)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,s)}{\partial x^2}+R_{11}(t,x,s)-\int R_{12}(t,x,\lambda)R_{22}(t,\lambda,s)d\lambda=0,$$

$$\frac{\partial R_{21}(t,x,s)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 R_{22}(t,x,s)}{\partial s^2}+R_{21}(t,x,s)-\int R_{22}(t,x,\lambda)R_{21}(t,\lambda,s)d\lambda=0,$$

$$\frac{\partial R_{22}(t,x,s)}{\partial t}+R_{12}(t,x,s)+R_{21}(t,x,s)-\int R_{22}(t,x,\lambda)R_{22}(t,\lambda,s)d\lambda=0,$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$R_{12}(t,x,0)=0,\quad R_{12}(t,x,l)=0,\quad R_{22}(t,x,0)=0,\quad R_{22}(t,x,l)=0,$$

$$R_{11}(t_1,x,s)=\delta(x-s),\ R_{12}(t_1,x,s)=0,\ R_{21}(t_1,x,s)=0,\ R_{22}(t_1,x,s)=\delta(x-s).$$

Поскольку справедливо соотношение $\delta(x-s)=\frac{2}{l}\sum\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}$ [2, с. 272] , то вполне естественными являются следующие представления:

$$R_{11}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n11}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},\ R_{12}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n12}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

$$R_{21}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n21}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},\ R_{22}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n22}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

где $r_{nij}(t), i=1,2,\ j=1,2,$ – неизвестные функции. В результате легко приходим к такому выводу.

Теорема 3. Для нахождения функций $r_{nij}(t), i=1,2,\ j=1,2,$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_{n11}(t)}{dt}-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2[r_{n12}(t)+r_{n21}(t)]-r_{n12}(t)r_{n21}(t)+1=0,$$

$$\frac{dr_{n12}(t)}{dt}-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n12}(t)r_{n22}(t)=0,$$

$$\frac{dr_{n21}(t)}{dt}-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n21}(t)r_{n22}(t)=0,$$

$$\frac{d\,r_{n22}(t)}{dt}+r_{n12}(t)+r_{n21}(t)-r_{n22}^2(t)r=0. \qquad (6)$$

При этом имеют место дополнительные условия

$$r_{n11}(t_1)=1,\ r_{n12}(t_1)=0,\ r_{n21}(t_1)=0,\ r_{n22}(t_1)=1, n=1,2,... \tag{7}$$

Замечание. Сравнение второго и третьего уравнений системы (6) и соответствующих условий (7) указывает на существование зависимости $r_{n12}(t)=r_{n21}(t)$.

Представляя неизвестные функции $y(t,x)$, $z(t,x)$, $q(t,x)$, $p(t,x)$ и $u(t,x)$ посредством рядов Фурье

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\quad z(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\quad q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$p(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\quad u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

и принимая во внимание равенство $u_n(t)=-q_n(t)$, вместо системы соотношений (5), получаем следующую бесконечную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_n(t)}{dt}=y_n(t), \\ \dfrac{dy_n(t)}{dt}=-\left[\dfrac{\pi an}{l}\right]^2 z_n(t)-q_n(t), \\ z_n(t_0)=f_n, y_n(t_0)=g_n, \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=\left[\dfrac{\pi an}{l}\right]^2 q_n(t)-z_n(t), \\ \dfrac{dq_n(t)}{dt}=-p_n(t), \\ p_n(t_1)=z_n(t_1), q_n(t_1)=y_n(t_1), n=1,2,\ldots, \end{cases}$$

где

$$y_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l y(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad z_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l z(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$q_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l q(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad p_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l p(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Этой системе уравнений можно поставить в соответствие матрицу $\mathbf{A}_n$ четвертого порядка

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(a\pi n/l\right)^2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \left(a\pi n/l\right)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}_n$ равны:

$$\lambda_{n1} = -\alpha_n - i\beta_n,\ \lambda_{n2} = \alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n3} = -\alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n4} = \alpha_n - i\beta_n,$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(a\pi n/l\right)^4 + 1} - \left(a\pi n/l\right)^2}{2}},\ \beta_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(a\pi n/l\right)^4 + 1} + \left(a\pi n/l\right)^2}{2}}.$$

Теорема 4. Матрица $\exp(\mathbf{A}_n t)$ имеет вид

$$\exp(\mathbf{A}_n t) = \mathbf{S}_n(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$s_{n11}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n21}(t) = \alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) - \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n31}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n41}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n12}(t) = \frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},\ s_{n22}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n32}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\ s_{n42}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n13}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},\ s_{n23}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n33}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n43}(t) = -\frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n14}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \;\; s_{n24}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n34}(t) = -\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \;\; s_{n44}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t).$$

Элементы матрицы $\mathbf{S}_n(t)$ определены с помощью пакета прикладных программ Mathematica 5.2 [3, с. 266]. Если ввести обозначения

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} z_n(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \;\; \boldsymbol{\lambda}_n(t) = \begin{bmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{F}_{n11}(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{n12}(t) = \begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{F}_{n21}(t) = \begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{n22}(t) = \begin{bmatrix} s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

Отсюда непосредственно находим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(t_1) &= \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{F}_{n12}(t_1 - t)\boldsymbol{\lambda}_n(t), \\ \boldsymbol{\lambda}_n(t_1) &= \mathbf{F}_{n21}(t_1 - t)\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)\boldsymbol{\lambda}_n(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношений $q_n(t_1) = z_n(t_1), \; p_n(t_1) = y_n(t_1), \; n = 1, 2, \ldots,$ следует, что $\boldsymbol{\lambda}_n(t_1) = \mathbf{x}_n(t), \; n = 1, 2, \ldots$. Поэтому на основании (8) имеем

$$\boldsymbol{\lambda}_n(t) = [\mathbf{F}_{n12}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)]^{-1}[\mathbf{F}_{n21}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)]\mathbf{x}_n(t). \tag{9}$$

Из равенств

$$p_n(t) = r_{n11} z_n(t) + r_{n12} y_n(t)$$

и

$$q_n(t) = r_{n21} z_n(t) + r_{n22} y_n(t)$$

следует такое соотношение $\boldsymbol{\lambda}_n(t) = \mathbf{R}_n(t)\mathbf{x}_n(t)$, где матрица имеет вид

$$\mathbf{R}_n(t) = \begin{bmatrix} r_{n11}(t) & r_{n12}(t) \\ r_{n21}(t) & r_{n22}(t) \end{bmatrix}.$$

Сравнение равенства (9) и соотношения $\boldsymbol{\lambda}_n(t) = \mathbf{R}_n(t)\mathbf{x}_n(t)$ приводит к следующему заключению.

Теорема 5. Матрицу $\mathbf{R}_n(t)$ можно найти с помощью соотношения

$$\mathbf{R}_n(t) = [\mathbf{F}_{n12}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)]^{-1}[\mathbf{F}_{n21}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)].$$

Представляет интерес дальнейшее исследование последнего соотношения с помощью численно-аналитических методов. В заключение следует отметить целесообразность обобщения результатов, полученных в данной работе, на случай систем с дробными производными [4, 5].

М.М. Копець

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОЛИВАННЯ СТРУНИ

Розглянута лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом коливання струни. Для цієї задачі, використовуючи метод множників Лагранжа, отримані необхідні умови оптимальності. Із цих умов виведена система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв’язок отриманої системи представлено в замкненій формі.

M.M. Kopets

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM BY PROCESS OF VIBRATION OF THE STRING

In the present paper the linear-quadratic optimal control problem for vibration process of the string is considered. For this problem the necessary optimality conditions are obtained by using the Lagrange multiplier method. The system of integro-differential Riccati equations is derived from this conditions. The solution of obtained system is represented in closed form.

1. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
3. *Васильев А.Н.* Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач. – К.: ВЕК+, СПб.: КОРОНА-ВЕК. – 2008. – 448 с.
4. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных системам с дробными производными Римана – Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 6. – С. 66 – 99.
5. *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Украинский математический журнал. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1566 – 1583.

Получено 11.03.2014