

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РИШЕНЬ

Использование точных штрафных функций в схемах декомпозиции по переменным нелинейных задач оптимизации позволяет преодолеть ряд проблем, связанных с неявным описанием допустимой области координирующей задачи. В работе рассматриваются вопросы определения значений штрафных коэффициентов при таком подходе.

© Ю.П. Лаптин, 2014

Теорія оптимальних рішень. 2014

УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН

ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В СХЕМАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ

Введение. Схемы декомпозиции по переменным широко используются при решении оптимизационных задач, обладающих специальной структурой [1 – 4]. При фиксированных значениях связывающих переменных исходная задача большой размерности распадается на совокупность небольших подзадач, каждая из которых решается независимо. Оптимальные значения подзадач зависят от параметров – связывающих переменных. Значения связывающих переменных определяются при решении координирующей задачи.

В случае, когда отдельные подзадачи являются задачами линейного программирования или имеют специальную структуру, их точные решения могут быть получены достаточно эффективно. На основе этих решений вычисляются субградиенты функций координирующей задачи. Если при некоторых значениях связывающих переменных подзадачи не имеют решений (множество допустимых точек пусто), определяются дополнительные ограничения в пространстве связывающих переменных. Трудоемкость построения таких дополнительных ограничений соизмерима с затратами на получение точных решений подзадач.

Для нелинейных подзадач ситуация существенно отличается. Во-первых, точное решение получить невозможно, только приближенное. Учитывая это приходится использовать ε -субградиенты функций координирующей задачи [5, 6]. С увеличением точности растет трудоемкость решения подзадач. Но намного более критическими являются

проблемы, возникающие в случае, когда множество допустимых точек подзадачи становится пустым. Поскольку для вычисления оценок используются кусочно-линейные аппроксимации функций подзадач, установить пустоту допустимого множества подзадачи при некоторых значениях связывающих переменных и построить дополнительные ограничения становится чрезвычайно сложно.

Эффективным подходом для преодоления этих проблем является использование точных штрафных функций. При практическом решении часто удается подобрать корректные значения штрафных коэффициентов и успешно решать задачи. Но в общем случае разработка методик определения значений штрафов наталкивается на существенные трудности, связанные с большой размерностью исходных задач. В предлагаемой работе предлагаются некоторые из возможных подходов к решению таких проблем.

Постановка задачи. Рассматривается квазиблочная задача математического программирования со связывающими переменными: найти

$$\min_{x,y} \sum_{q=1}^Q f_q^0(x, y^q) \quad (1)$$

при ограничениях

$$f_q^i(x, y^q) \leq 0, i = 1, \dots, I_q, q = 1, \dots, Q, \quad (2)$$

где $f_q^i(x, y^q)$ – выпуклые дифференцируемые функции, принимающие конечные значения при любых значениях аргументов, $x \in R^L$, $y^q \in R^{N_q}$, $i = 0, \dots, I_q$, $q = 1, \dots, Q$.

Пусть связывающие переменные x фиксированы. Обозначим

$$\Phi^q(x) = \min \left\{ f_q^0(x, y^q) : y^q \in D^q(x) \right\}, \quad (3)$$

где $D^q(x) = \left\{ y^q : f_q^i(x, y^q) \leq 0, i = 1, \dots, I_q \right\}$. Положим $W^q = \left\{ x : D^q(x) \neq \emptyset \right\}$,

$\Phi^q(x) = +\infty$, если $x \notin W^q$.

В схемах декомпозиции решается следующая задача, которая эквивалентна исходной (1) – (2): найти

$$\min \left\{ \sum_{q=1}^Q \Phi^q(x) : x \in W^q, q = 1, \dots, Q \right\}. \quad (4)$$

Известно (см., например, [2]), что $\Phi^q(x)$ – выпуклые собственные функции. Для вычисления субградиентов функций $\Phi^q(x)$ используются точные

решения подзадач (3). Вопросы построения ε -субградиентов этих функций на основании приближенных решений рассматривались в [5, 6].

Рассмотрим задачу (3). Индекс q , если это не вызывает неоднозначность, будем опускать. Пусть заданы точка $\bar{x} \in R^L$ и совокупность y_1, y_2, \dots, y_m точек из E^N , в каждой точке (\bar{x}, y_k) вычислены значения $f^{ik} = f^i(\bar{x}, y_k)$ и субградиенты $g^{ik} = (g_x^{ik}, g_y^{ik})$ функций $f^i, i = 0, \dots, I, k = 1, \dots, m$. Рассмотрим нижнюю линейную аппроксимацию задачи (3) при фиксированном $x = \bar{x}$

$$\min_{y, \xi} \xi, \quad (5)$$

при ограничениях

$$f^{ik} + (g_y^{ik}, y - y_k) \leq \xi, \quad k = 1, \dots, m, i = 0, \quad (6)$$

$$f^{ik} + (g_y^{ik}, y - y_k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, I. \quad (7)$$

Теорема 1 [5]. Пусть задана точка $\bar{y} \in D(\bar{x})$, ξ^*, y^* – оптимальное решение, \bar{u}_{ik} – оптимальные значения двойственных переменных, $k = 1, \dots, m, i = 0, \dots, I$, задачи (5)–(7). Тогда $\xi^* \leq \Phi(\bar{x}) \leq f^0(\bar{x}, \bar{y})$, $g_\Phi^\varepsilon(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^I \bar{u}_{ik} g_x^{ik}$, где $\varepsilon = f^0(\bar{x}, \bar{y}) - \xi^*$.

Обычно, точки y_1, y_2, \dots, y_m генерируются в ходе решения задачи (3), точка $\bar{y} \in D(\bar{x})$ одна из них (наилучшая допустимая). Проблема получения допустимых точек в ходе решения задачи (3) может быть достаточно сложной.

Ситуация существенно ухудшается, в случае, когда $D(\bar{x}) = \emptyset$. Обозначим

$$D_m(\bar{x}) = \left\{ y : f^{ik} + (g_y^{ik}, y - y_k) \leq 0, k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, I \right\}.$$

Множество $D_m(\bar{x})$ – это аппроксимация множества $D(\bar{x})$. Если $D_m(\bar{x}) = \emptyset$, то можно построить [4] дополнительное ограничение вида $\langle a, x \rangle + b \leq 0$, которому должны удовлетворять связывающие переменные (точки множества W). Совокупность таких ограничений при разных значениях вектора x формирует

аппроксимацию множеств W . Однако, в случае, когда $D(\bar{x}) = \emptyset$, построение совокупности точек $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, для которой выполняется условие $D_m(\bar{x}) = \emptyset$, может быть очень трудоемким.

Одним из подходов к преодолению этих проблем является использование точных штрафных функций при решении задачи (1) – (2). Такой прием предлагался еще в [1]. Исходная задача при этом становится задачей безусловной

оптимизации: найти

$$\min_{x,y} \sum_{q=1}^Q \left[f_q^0(x, y^q) + \sum_{i=1}^{l_q} \beta_q^i f_q^{i+}(x, y^q) \right], \quad (8)$$

и ключевым оказывается вопрос определения значений коэффициентов β_q^i .

Здесь $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$. Необходимо отметить, что значения β_q^i должны быть не меньше оптимальных значений двойственных переменных задачи (1) – (2) и не могут быть получены при решении отдельных подзадач вида (3).

Основные результаты. Для описания предлагаемого подхода к определению значений штрафных коэффициентов будем рассматривать задачи в стандартной формулировке: найти

$$f_0^* = \min \{f_0(x) : x \in \Omega\}, \quad (9)$$

где $\Omega = \{x : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in R^n\}$, $f_i : R^n \rightarrow R$, $i = 0, 1, \dots, m$ – выпуклые непрерывные дифференцируемые функции.

$$\text{Положим } \Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i f_i^+(x) \text{ \& \textit{,} } \quad h(x) = \max \{f_i^+(x), i = 1, \dots, m\},$$

$$F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda h(x),$$

$$\Phi_\beta^* = \min \{ \Phi_\beta(x) : x \in R^n \}, \quad (10)$$

$$F_\lambda^* = \min \{ F_\lambda(x) : x \in R^n \}. \quad (11)$$

$\Phi_\beta(x)$ ($F_\lambda(x)$) называется точной штрафной функцией, если решения задач (9) и (10) (соответственно (11)) совпадают.

Известно (см., например, [2]), что если $u_i^*, i = 1, \dots, m$ – оптимальные значения множителей Лагранжа задачи (9), то $\Phi_\beta(x)$ – точная штрафная функция при $\beta_i > u_i^*, i = 1, \dots, m$, $F_\lambda(x)$ – точная штрафная функция при $\lambda > \sum_{i=1}^m u_i^*$.

Точные штрафные функции широко используются при реализации различных алгоритмов оптимизации [1, 2, 7]. При этом для определения

множителей Лагранжа на каждой итерации решаются некоторые вспомогательные задачи (например, линеаризации исходной задачи). В схемах декомпозиции такой подход неприменим учитывая большую размерность исходной задачи.

Рассмотрим другие подходы. Для выпуклой функции $\varphi(x)$ обозначим $\varphi'(x, p)$ одностороннюю производную в точке $x \in R^n$ по направлению p . Положим: $p(x, y)$ вектор, определяющий направление из точки x в точку y ,

$$p(x, y) = (y - x) / \|y - x\|, \quad y \neq x,$$

$$T_\delta(x, y) = [x, x + \delta p(x, y)] \cap [x, y],$$

где $\delta > 0$. Множество $T_\delta(x, y)$ – это δ -окрестность точки x на отрезке $[x, y]$.

Очевидно, что $T_\delta(x, y) = [x, y]$, если $\delta > \|y - x\|$.

Теорема 2 [9]. Пусть $\Phi: R^n \rightarrow R$ – непрерывная, дифференцируемая по направлениям функция (существуют односторонние производные), \tilde{x} – локальный минимум функции Φ на R^n , Ω_B – ограниченное замкнутое множество, $\Omega_B \subset R^n$, $\text{int } \Omega_B \neq \emptyset$, $y^0 \in \text{int } \Omega_B$, $x^k \in R^n$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность, сходящаяся к \tilde{x} , для некоторых чисел $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\Phi'(x, p(x^k, y^0)) \leq -\varepsilon, \quad \forall x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega_B. \quad (12)$$

Тогда для предельной точки \tilde{x} имеет место $\tilde{x} \in \Omega_B$.

Из приведенной теоремы непосредственно следует следующая

Теорема 3. Пусть заданы числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, допустимая точка $y^0 \in \text{int } \Omega$, задачи (9) и (10) (или (11)) имеют решения, последовательность точек x^k , $k = 0, 1, \dots$, сходится к решению \bar{x} задачи (10) (соответственно (11)) и выполняются условия:

$$\varphi'(x, p(x^k, y^0)) \leq -\varepsilon, \quad x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где $\varphi(x) = \Phi_\beta(x)$ (соответственно $\varphi(x) = F_\lambda(x)$). Тогда \bar{x} – это решение задачи (9).

Пусть для решения задачи (10) используется некоторый сходящийся алгоритм безусловной оптимизации, и заданы начальные значения коэффициентов $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, m$. Условие (13) позволяет определять простые

процедуры уточнения штрафных коэффициентов по ходу работы алгоритма, например, если на некоторой итерации это условие не выполняется, положить $\beta_i = \gamma \cdot \beta_i$, $i = 1, \dots, m$, где $\gamma \geq \bar{\gamma} > 1$ выбирается так, чтобы условие (13) выполнилось. Здесь $\bar{\gamma}$ – некоторый фиксированный параметр. Таким же образом увеличивается коэффициент λ , если используется функция $F_\lambda(x)$.

Аналогично тому, как это делалось в [8], можно показать, что при условии $y^0 \in \text{int } \Omega$ число уточнений штрафных коэффициентов будет конечно.

При практическом использовании рассматриваемого подхода необходимо конкретизировать процедуру проверки условия (13). Нетрудно видеть, что множество, на котором это условие проверяется, имеет вид

$$X = \{x : x = x^k + tp(x^k, y^0), 0 \leq t \leq \bar{t}\}$$

либо

$$X = \{x : x = x^k + tp(x^k, y^0), 0 \leq t < \bar{t}\}.$$

Во втором случае предельная точка $x = x^k + \bar{t} \cdot p(x^k, y^0)$ не принадлежит множеству X . Проверка заключается в анализе поведения функции $\varphi(t) = \Phi_\beta(x^k + t \cdot p(x^k, y^0))$ в интервале $0 \leq t < \bar{t}$. Обозначим $\varphi'_+(t)$ производную функции $\varphi(t)$ в точке t в направлении увеличения переменной t , $\varphi'_-(t)$ – производная в направлении уменьшения переменной t . В силу выпуклости функции $\varphi(t)$ имеем $\varphi'_+(t_1) \leq \varphi'_+(t_2) \leq -\varphi'_-(\bar{t})$ для любых $t_1, t_2 \in [0, \bar{t}]$, $t_1 < t_2$. Откуда следует, что проверку условия (13) достаточно проводить только в точке \bar{t} .

При неудачном выборе точки $y^0 \in \text{int } \Omega$ значения штрафных коэффициентов могут устанавливаться достаточно большими. Для уменьшения этих значений точка y^0 может варьироваться в процессе решения задачи (10) или

(11).

В работе [8] показано, что минимальное значение λ^* коэффициента λ , которое может быть достигнуто за счет варьирования точки y^0 , равно $\lambda^* = \sum_{i=1}^m u_i^*$ для задач линейного программирования при определенных условиях. В схемах декомпозиции, учитывая большую размерность исходной задачи, значение λ^* может оказаться неприемлемо большим.

При использовании функции Φ_β существенным является такая организация вычислительного процесса, чтобы коэффициенты β_i не принимали слишком

больших значений. Обозначим $I(x) = \{i : f_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}\}$, и представим условия (13) для функций F_λ и Φ_β в следующем виде

$$f_0'(x, p) + \lambda f_j'(x, p) \leq -\varepsilon, \quad j = \arg \max \{f_i^+(x), i = 1, \dots, m\},$$

$$f_0'(x, p) + \sum_{i \in I(x)} \beta_i f_i'(x, p) \leq -\varepsilon,$$

где $p = p(x, y^0)$, $x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega$. То есть для штрафной функции F_λ возрастание функции f_0 в точке x в направлении p уравнивается убыванием одной функции f_j , а для функции Φ_β – убыванием совокупности функций f_i , $i \in I(x)$.

Естественно ожидать, что при большом числе ограничений m коэффициенты точной штрафной функции $\Phi_\beta(x)$ будут существенно меньше коэффициента λ функции $F_\lambda(x)$. Однако, это не так для точек x , в которых нарушается только одно ограничение.

Одним из путей обеспечения того, чтобы коэффициенты β_i , $i = 1, \dots, m$ оставались сравнительно небольшими, является формирование последовательности точек x^k , $k = 0, 1, \dots$, (или подпоследовательности точек, в которых проверяются условия (13)) таким образом, чтобы для точек $x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega$

число $|I^+(x)|$ нарушенных ограничений в точках $x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega$ было не меньше некоторого заданного параметра ν , $\nu \leq n$. Здесь $I^+(x) = \{i : f_i(x) > 0, i \in \{1, \dots, m\}\}$. Построение таких точек связано с дополнительными вычислительными затратами.

Другой подход связан с тем, чтобы в случае $|I^+(x)| < \nu$ использовалось иное правило регулировки коэффициентов β_i .

Пусть точка x зафиксирована, $J \subseteq I(x)$. Рассмотрим задачу: найти

$$\psi(x) = \min_p \langle f_0'(x), p \rangle, \quad (14)$$

$$\langle f_i'(x), p \rangle \leq 0, \quad i \in J, \quad (15)$$

$$\|p\| \leq 1 \quad (16)$$

и штрафную функцию

$$\varphi_{\beta}(x, p) = \langle f_0'(x), p \rangle + \sum_{i \in J} \beta_i \langle f_i'(x), p \rangle^+ + \beta^p (\|p\| - 1)^+.$$

Пусть p^* – решение задачи (14) – (16) $u_i(x, J)$, $i \in J$, $v(x, J)$ оптимальные значения двойственных переменных, соответствующих ограничениям (15), (16). При условиях

$$\beta_i > u_i(x, J), i \in J, \quad (17)$$

и $\beta^p > v(x, J)$ имеет место $\varphi_{\beta}(x, p^*) = \min \{ \varphi_{\beta}(x, p) : p \in R^n \}$.

Положим $J = I(x)$. Пусть $p^* \neq 0$, т. е. $p^* = 1$. Нетрудно видеть, что для производной по направлению $\Phi_{\beta}'(x, p^*)$ справедливо $\Phi_{\beta}'(x, p^*) = \varphi_{\beta}(x, p^*)$, $\varphi_{\beta}(x, p^*) < 0$, и вектор p^* определяет направление убывания функции $\Phi_{\beta}(x)$.

Пусть $p^* = 0$. Тогда $f_0'(x) + \sum_{i \in J} u_i(x, J) f_i'(x) = 0$, $\Phi_{\beta}'(x, p) = \sum_{i \in J} (\beta_i - u_i(x, J)) \langle f_i'(x), p \rangle$ и, выбирая любой вектор $p \neq 0$, удовлетворяющий условиям (15), получаем направление убывания функции $\Phi_{\beta}(x)$.

Таким образом, справедлива

Лемма 1. Пусть задано $\varepsilon > 0$, f_i , $i = 0, 1, \dots, m$ – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, задачи (9) и (10) имеют решения, x^k , $k = 0, 1, \dots$, – последовательность, сходящаяся к решению \bar{x} задачи (10), и выполняются условия

$$\beta_i \geq u_i(x^k, I(x^k)) + \varepsilon, i \in I(x^k), k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Тогда \bar{x} – это решение задачи (9).

Для доказательства достаточно отметить, что если $\bar{x} \notin \Omega$, то в точке \bar{x} выполняются условия (18) и существует направление убывания функции $\Phi_{\beta}(x)$, что противоречит предположению об оптимальности точки \bar{x} .

Рассмотрим возможные подходы к решению задачи (14) – (16). Обозначим I^* множество активных ограничений вида (15) в оптимальной точке p^* , $L(p, u, v) = \langle f_0'(x), p \rangle + \sum_{i \in J} u_i \langle f_i'(x), p \rangle + v(\|p\|^2 - 1)$ – функция Лагранжа (используется квадрат ограничения (16), что эквивалентно). Если ограничение (16) активно в точке p^* , то условия оптимальности (Каруша – Куна – Таккера) имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial p}(p, u, v) = f_0'(x) + \sum_{i \in I^*} u_i f_i'(x) + 2vp = 0, \quad (19)$$

$$\langle f_i'(x), p \rangle = 0, \quad i \in I^*, \quad (20)$$

$$\|p\|^2 - 1 = 0. \quad (21)$$

Умножая (19) скалярно на вектор $f_j'(x)$ и учитывая (20), получаем систему уравнений

$$\langle f_0'(x), f_j'(x) \rangle + \sum_{i \in I^*} u_i \langle f_i'(x), f_j'(x) \rangle = 0, \quad j \in I^*, \quad (22)$$

из которой при невырожденности однозначно определяются оптимальные значения двойственных переменных $u_i(x, J)$, $i \in J$. Вектор p^* после этого находится из соотношений (19) и (21).

Для наших целей достаточно ограничиться приближенным решением задачи (14) – (16), т. е. вместо I^* использовать множество $\tilde{I} \subseteq J$, для которого решение \tilde{u} системы уравнений (22) удовлетворяет условию $\tilde{u} \geq 0$, а направление убывания целевой функции (14) из точки $p = 0$, определяемое по соотношению (19), удовлетворяет всем ограничениям (15). Для построения такого множества $\tilde{I} \subseteq J$ могут быть предложены достаточно эффективные алгоритмы. В случае, когда число $|I^+(x^k)|$ нарушенных ограничений в текущей точке x^k достаточно большое, трудоемкость решения задачи (14) – (16) становится слишком высокой.

Для построения правил, позволяющих при сравнительно невысоких вычислительных затратах определять не слишком большие значения штрафных коэффициентов, следует объединить рассмотренные подходы, т. е. при $|I^+(x)| > v$ использовать условие (13), в противном случае – условие (18).

Заключение. Заметим, что допустимая точка $y^0 \in \text{int} \Omega$ может варьироваться по ходу решения задачи (10), также возможны и другие правила уточнения коэффициентов. Полученные результаты могут быть полезны при разработке алгоритмов декомпозиции выпуклых квазиблочных задач.

Ю.П. Лаптин

ТОЧНІ ШТРАФНІ ФУНКЦІЇ У СХЕМАХ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЗА ЗМІННИМИ

Використання точних штрафних функцій у схемах декомпозиції за змінними нелінійних задач оптимізації дозволяє подолати ряд проблем, пов'язаних з неявним описом допустимої області координуючої задачі. В роботі розглядаються питання визначення штрафних коефіцієнтів при такому підході.

Yu.P. Laptin

EXACT PENALTY FUNCTIONS IN SCHEMES OF DECOMPOSITION OF VARIABLES

The use of exact penalty functions in schemes of decomposition of variables for nonlinear optimization problems can overcome a number of difficulties associated with the implicit description of the feasible region for master problems. In the paper the determination of values of penalty coefficients according this approach is considered.

1. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 199 с.
2. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.
3. *Zverovich V., Fábán C., Ellison E., Mitra G.* A computational study of a solver system for processing two-stage stochastic LPs with enhanced Benders decomposition // *Mathematical Programming Computation*, September 2012. – Vol. 4, Issue 3. – P. 211 – 238.
4. *Ruszczynski A.* A regularized decomposition method for minimizing a sum of polyhedral functions // *Mathematical Programming*. – 1986. – 35: P. 309 – 333.
5. *Лаптин Ю.П.* ε -субградиенты в методах декомпозиции по переменным для некоторых задач оптимизации // *Теорія оптимальних рішень*. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2003. – № 2. – С. 75 – 82.
6. *Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г., Кузьменко В.Н.* Решение блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными // *Теорія оптимальних рішень*. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2004. – № 3. – С. 142 – 149.
7. *Byrd R.H., Lopez-Calva G., Nocedal J.* A line search exact penalty method using steering rules // *Math. Program., Series A and B*. – 2012. – Vol. 133. – P. 39 – 73.
8. *Лаптин Ю.П.* Вопросы построения точных штрафных функций // *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 10: Прикладная математика*. – 2013. – Вып. 4. – С. 21 – 31.
9. *Лаптин Ю.П.* Решение невыпуклых задач оптимизации с использованием точных штрафных функций // *Компьютерная математика*. – 2014. – № 1. – С. 119 – 130.

Получено 02.04.2014