УДК 519.1

В.Б. ПАВЛЕНКО

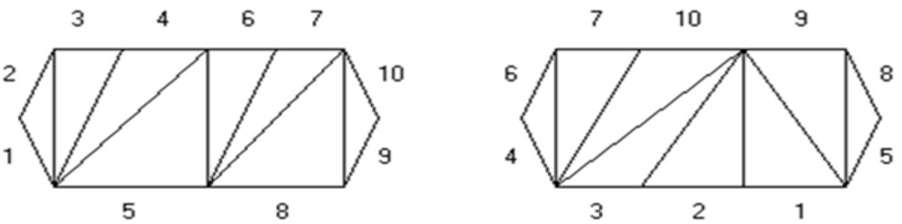
АЛГОРИТМ РАСКРАСКИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

Рассматривается подход к решению проблемы раскрашивания плоских графов составлением функции решения для каждой из областей путем отображения одной области на другую.

Введение. Задача о нахождении хроматического числа графов [1] является *NP*-полной. При этом проблема четырех красок сводится к раскраске в 3 цвета плоских графов, у которых степени всех вершин равны 4. Это достигается путем замены в плоской триангуляции ребер вершинами с сохранением их смежности.

Знаменитая задача о четырех красках сводится к решению системы уравнений в классах вычетов по модулю 3. Сначала строится система для простого линейного случая, когда двойственные графы в областях R_1 и R_2 являются цепями. Решения для каждой такой области можно упорядочить таким образом, что каждое решение (вектор X) является функцией от номера этого решения в пределах от 0 до $3\cdot 2^{n-2}-1$. Аналогичная система строится и для общего случая, когда двойственные графы к областям R_1 и R_2 являются деревьями со степенью ветвления 3. В этом случае также удается найти функцию, которая любому числу в тех же пределах ставит в соответствие решение системы неравенств, однако эта функция может иметь достаточно много слагаемых. Задача четырех красок будет решена тогда, когда будет доказано, что для областей R_1 и R_2 всегда найдутся два таких числа $0\le u,\upsilon\le 3\cdot 2^{n-2}-1$, что их функция решения – векторы $X(u)$ и $Y(\upsilon)$ получаются один из другого путем перестановки соответствующей отображению R_1 на R_2.

Рассмотрим максимальный четырехсвязный планарный граф G на рис. 1. Если он правильно раскрашен четырьмя цветами, то его ребра можно так раскрасить тремя цветами, что в каждой его треугольной грани все ребра будут окрашены по разному.



а б

РИС. 1. Пронумерованные области R_1 и R_2

Любой правильной раскраске вершин графа *G* соответствует такая раскраска в три цвета его ребер, что в каждом треугольнике все три ребра имеют разные цвета, которые обозначим 0, 1, –1. Пусть x_i – цвет ребра под номером *i* гамильтонова цикла. Тогда, для первых двух ребер справедливо

$$x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Пусть $a_j, (j = 1, 2, ..., n-2)$ – переменные, соответствующие цветам внутренних ребер.

Как известно [2] общее число решений для одной области равно $3 \cdot 2^{n-2}$, что в нашем случае $3 \cdot 2^8 = 768$. Будем искать такие пары значений: $0 \le u, \nu \le 767$, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
&-1 + a_8 = -\beta_3 + \beta_2, \\
&a_8 - a_7 = \beta_4 - \beta_3, \\
&-a_7 + a_6 = -\beta_5 + \beta_4, \\
&a_6 - a_5 = 1 - \beta_8, \\
&-a_5 + a_4 = 1 - \upsilon, \\
&a_4 - a_3 = \beta_8 - \beta_7, \\
&-a_3 + a_2 = -\beta_7 + \beta_6, \\
&a_2 - a_1 = -\beta_1 + \upsilon, \\
&-a_1 + u = \beta_2 - \beta_1, \\
&-u + 1 = \beta_6 - \beta_5.
\end{aligned} \tag{1}$$

Если найдутся соответствующие значения $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, то можно найти соответствующую раскраску графа *G* [3]. В области R_1 зафиксируем первые два значения $x_1 = 1, x_2 = 0,$ что равносильно $a_8 = 0$ и $u \in [0, 127]$. Пошагово рассмотрим дальнейшие действия.

1. $x_1 = 1 = \left\lfloor \dfrac{\nu + 2^2}{2^5} \right\rfloor$. В области $R_1 \in [0, 127]$.

В R_2 $x_1 = 1$ для $v \in [4{,}12) + 24k$, где максимальное значение $k = \lfloor (767 - 12)/24 \rfloor = 31$. Тут и далее следует понимать, что круглые скобки обозначают, что переменные не принимают правое значение. Имеем: $u \in [0{,}127]$, $v \in [4{,}12) + 24k, (k = 0{,}1, \dots, 31)$.

2. $x_2 = 0 = -\left\lfloor \frac{v+2^3}{2^4} \right\rfloor$. В области R_1 границы u не меняются. В области R_2 $x_2 = 0$ для $v \in (-8{,}8) + 48k$. Общий интервал с x_1 равен [4,8). Максимальное $k = \lfloor (767 - 8)/48 \rfloor = 15$. После двух шагов решение принадлежит множествам: $u \in [0{,}127]$, $v \in [4{,}8) + 48k, (k = 0{,}1, \dots, 15)$.

3. $x_3 = \left\lfloor \frac{u+2^6}{2^7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v+2^3}{2^4} \right\rfloor$.

$$x_3 = \begin{cases} 0, u \in [0{,}64), \\ 1, u \in [64{,}127]. \end{cases} \qquad x_3 = \begin{Bmatrix} 0, v \in [-16{,}16) \\ 1, v \in [16{,}48) \\ -1, v \in [48{,}80) \end{Bmatrix} + 96k.$$

В R_1 $x_3 = 0$ для $u \in [0{,}64]$, а в R_2 тоже значение для интервала:

$$v \in \{[4{,}8] + 48k\} \cap \{[-16{,}16] + 96k\} = \emptyset.$$

В результате множество решений сужается до:

$$u \in [0{,}64], v \in [4{,}8] + 96k, (k = 0{,}1, \dots, 7).$$

4. $x_4 = -\left\lfloor \frac{u+2^5}{2^6} \right\rfloor = 1 - \left\lfloor \frac{v}{2^8} \right\rfloor$.

$$x_4 = \begin{cases} 0, u \in [0{,}32), \\ 1, u \in [32{,}63]. \end{cases} \qquad x_4 = \begin{cases} 1, v \in [0{,}256), \\ 0, v \in [256{,}512), \\ -1, v \in [512{,}767]. \end{cases}$$

$$u \in [0{,}32] \to v \in \{[4{,}8] + 96k\} \cap [256{,}512),$$
$$u \in [32{,}63] \to v \in \{[4{,}8] + 96k\} \cap [512{,}767).$$

Окончательно имеем:

$$u \in [0{,}32], v \in [292{,}296] + 96k, (k = 0{,}1{,}2),$$
$$u \in [32{,}63], v \in [580{,}584] + 96k, (k = 0{,}1).$$

5. $x_5 = -\left\lfloor \frac{u+2^4}{2^5} \right\rfloor = 1 - v$.

$$x_5 = \begin{cases} 0, u \in [0{,}16), \\ 1, u \in [16{,}48), \\ -1, u \in [48{,}63]. \end{cases} \qquad x_5 = \begin{cases} 0, v \equiv 1(mod3), \\ 1, v \equiv 0(mod3), \\ -1, v \equiv -1(mod3). \end{cases}$$

$$u \in [0{,}16) \to v \in \{[292{,}296) + 96k\} \cap 1(mod3),$$
$$u \in [16{,}32) \to v \in \{[292{,}296) + 96k\} \cap 0(mod3),$$
$$u \in [32{,}48) \to v \in \{[580{,}584) + 96k\} \cap 0(mod3),$$
$$u \in [48{,}63] \to v \in \{[580{,}584) + 96k\} \cap -1(mod3).$$

Окончательно имеем:

$$u \in [0{,}16), v = \{292{,}295\} + 96k, (k = 0{,}1{,}2),$$
$$u \in [16{,}32), v = \{294\} + 96k, (k = 0{,}1{,}2),$$
$$u \in [32{,}48), v = \{582\} + 96k, (k = 0{,}1),$$
$$u \in [48{,}63], v = \{581\} + 96k, (k = 0{,}1).$$

6. $x_6 = -\left\lfloor \frac{u+2^3}{2^4} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{u+2^7}{2^8} \right\rfloor$.

$$x_6 = \begin{cases} 0, u \in [0,8), \\ -1, u \in [8,24), \\ 1, u \in [24,40), \\ 0, u \in [40,56), \\ -1, u \in [56,63], \end{cases} \quad x_6 = \begin{cases} 0, v \in [0,128), \\ -1, v \in [128,384), \\ 1, v \in [384,640), \\ 0, v \in [640,767]. \end{cases}$$

$$u \in [0,8) \to v = (\{292,295\} + 96k) \cap [0,128) = \emptyset,$$
$$u \in [8,16) \to v = (\{292,295\} + 96k) \cap [128,384) = \{292,295\},$$
$$u \in [16,24) \to v = (\{294\} + 96k) \cap [128,384) = \{294\},$$
$$u \in [24,32) \to v = (\{294\} + 96k) \cap [384,640) = \{390,486\},$$
$$u \in [32,40) \to v = (\{582\} + 96k) \cap [384,640) = \{582\},$$
$$u \in [40,48) \to v = (\{582\} + 96k) \cap ([0,128) \cup [640,767)) = \{678\},$$
$$u \in [48,56) \to v = (\{581\} + 96k) \cap ([0,128) \cup [640,767)) = \{677\},$$
$$u \in [56,63) \to v = (\{581\} + 96k) \cap [128,384) = \emptyset.$$

7. $x_7 = \left\lfloor \frac{u+2^2}{2^3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v+2^6}{2^7} \right\rfloor$.

$$x_7 = \begin{cases} 1, u \in [8,12), \\ -1, u \in [12,20), \\ 0, u \in [20,28), \\ 1, u \in [28,36), \\ -1, u \in [36,44], \\ 0, u \in [44,52), \\ 1, u \in [52,56). \end{cases} \quad x_7 = \left\{ \begin{matrix} 1, v \in [-64,64), \\ 1, v \in [64,192), \\ 1, v \in [192,320). \end{matrix} \right\} + 384l.$$

$$u \in [8,12) \to v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{292,295\} = \emptyset,$$
$$u \in [12,16) \to v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{292,295\} = \{292,295\},$$
$$u \in [16,20) \to v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{294\} = \{294\},$$
$$u \in [20,24) \to v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{294\} = \emptyset,$$
$$u \in [24,28) \to v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{390,486\} = \{390\},$$
$$u \in [32,36) \to v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{582\} = \emptyset,$$
$$u \in [36,40) \to v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{582\} = \{582\},$$
$$u \in [40,44) \to v = \{[192,320) + 384l\} \cap \{678\} = \{678\},$$
$$u \in [44,48) \to v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{678\} = \emptyset,$$
$$u \in [48,52) \to v = \{[-64,64) + 384l\} \cap \{677\} = \emptyset,$$
$$u \in [52,56) \to v = \{[64,192) + 384l\} \cap \{677\} = \emptyset.$$

8. $x_8 = -\left\lfloor \frac{u+2}{2^2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + v$.

Для *v* осталось только семь точек, поэтому проверим это равенство непосредственно, сопоставив значения:

$v =$	292	295	294	390	486	582	678
$x_8 =$	–1	1	0	0	0	0	0

Аналогично для *u*:

$u =$	12 – 13	14 – 17	18 – 19	24 – 25	26 – 29	30 – 31	36 – 37	38 – 41	42 – 43
$x_8 =$	0	–1	1	0	–1	1	0	–1	1.

Сравнивая u и v получим для проверки только три точки:

$$(14{,}15) \to 292,\ (24{,}25) \to 390,\ (36{,}37) \to 582.$$

9. $x_9 = u - \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{v+2}{2^2} \right\rfloor$.

Решая это уравнение, находим три решения: (15,292), (25,390) и (37,582). Благодаря перестановке трех цветов можно получить еще пять решений для u:

$$15 \to (240{,}271{,}496{,}527{,}752),$$
$$25 \to (230{,}281{,}486{,}537{,}742),$$
$$37 \to (218{,}293{,}474{,}549{,}730),$$

и для v:

$$292 \to (731{,}548{,}219{,}36{,}475),$$
$$390 \to (633{,}646{,}121{,}134{,}377),$$
$$582 \to (441{,}70{,}697{,}326{,}185).$$

Заключение. Этим исчерпываются все 18 решений для данного примера. Если зафиксировать только одно значение $x_1 = 1$, то получим 6 решений. Это соответствует высказанной гипотезе, для которой при $n = 10$ получаем $4{,}2 < 6 < 10{,}5$.

В.Б. Павленко

АЛГОРИТМ РОЗФАРБОВУВАННЯ ПЛОСКИХ ГРАФІВ

Розглядається підхід до розв’язання проблеми розфарбовування плоских графів складанням функції рішення для кожної області шляхом відображення однієї з областей на іншу.

V.B. Pavlenko

ALGORITHM COLORINGS OF PLANE GRAPHS

The article discusses the approach to the problem coloring of planar graphs, which consists in making the decision function for each of the areas by mapping one area to another.

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. *Донец Г.А., Шор Н.З.* Алгебраический подход к исследованию задачи о четырех красках // Теорія оптимальних рішень. – К.: Інститут кібернетики. – 1967. – С. 23 – 29.
3. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

Получено 27.01.2015