УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, Г.О. ШУЛІНОК

АЛГОРИТМИ ПОШУКУ ПАРОСПОЛУЧЕНЬ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВСТУПУ ДО НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Представлені алгоритми пошуку стабільних паросполучень для двох класів учасників, кожний з яких має рейтинг іншого класу.

Вступ. Виходячи з епохальної статті [1] (один з її авторів – Нобелівський лауреат 2012 р.), теоретичні моделі надають важливе і практично цінне розуміння стратегічної структури ринків паросполучень і розкривають істотні зв'язки між різними економічними задачами. Хоча література просунулася далеко за межі відомої моделі [1] ринку моногамних шлюбів, ідеї тієї моделі залишаються центральними в літературі. Головним елементом теоретичних моделей паросполучень є поняття кооперативного рішення попарної стабільності: паросполучення аген-тів може зберігатися на ринку корисливих агентів тоді й тільки тоді, коли не існує двох несполучених агентів, кожний з яких бажав би сформувати їхнє партнерство. Експериментальні свідчення [2] (автор роботи [2] – Нобелівський лауреат 2012 р.) говорять, що стабільність може бути ключовим визначником довговічності й успіху ринкових механізмів. Важливим практичним питанням є те, як слід проектувати ринкові правила для того, щоб досягати стабільних результатів [3]. Для одного класу моделей паросполучень проста й зрозуміла процедура, яку називають алгоритмом відтермінованого прийняття (deferred acceptance algorithm, DAA) [4], завжди знаходить стабільні паросполучення.

При вступі в університети України у 2015 р. кожний абітурієнт вперше використає пріоритетність – показник, виражений цифрами від 1 до 15, який вступник особисто присвоює своїм заявам, де 1 є показником найбільшої пріоритетності заяви [5].

Пріоритетність, визначена вступником у заяві про участь у конкурсі, не може бути змінена протягом вступної кампанії.

Аналіз можна розпочати з класу ринків двостороннього паросполучення, в яких лише одна сторона ринку (університети чи школи) може сполучатися з двома і більше партнерами [6]. Однак теорія таких ринків виключає практичне застосування з погляду добробуту: наприклад, на ринках праці пошук працівниками кількох робіт не є незвичайним. На багатьох ринках паросполучень посередники сприяють обміну думками чи формуванню партнерства між агентами, тобто ці ринки перестають бути двосторонніми. Була запропонована модель ланцюга постачання [7], що враховує вищезазначені особливості [8]. У цій моделі агенти розташовані на екзогенно заданій вертикально впорядкованій мережі (направленому графі зв'язків між агентами без направлених циклів), не виявляючи переваг щодо множин комерційних взаємозв'язків або контрактів з їхніми сусідами. Було показано, що узагальнена попарна стабільність (ланцюгова стабільність) існує для природного кола переваг і може відігравати важливу роль у поширенні теорії паросполучень на двосторонні ринки паросполучень. На відміну від попарних стабільних паросполучень у двосторонніх вищерозглянутих моделях, ланцюгові стабільні розподіли можуть залежати від координованих відхилень і не бути ефективними, що ставить під питання кооперативні засади поняття ланцюгової стабільності і заважає поширенню теорії двосторонніх паросполучень. Можна охарактеризувати найбільший клас моделей ланцюгів постачання, в яких ланцюгові стабільні розподіли не залежать від будь-яких коаліційних відхилень і є ефективними. Характеризація основана на властивостях екзогенно заданої структури мережі, в якій агенти взаємодіють, за умови виключення певних видів комерційних циклів. Використання ланцюгової стабільності без обмежень на переваги є зручним: якщо мінімальні вимоги стабільності можна узгодити з ефективністю, то ланцюгові стабільні розподіли є ефективними; якщо ланцюгові стабільні розподіли залежать від деяких коаліційних відхилень, то не існує розподілу, що не залежить від усіх коаліційних відхилень. Можна дослідити взаємозв'язок між поняттям ланцюгової стабільності та класичним поняттям (кооперативного) рішення – ядром, а також охарактеризувати найбільший клас моделей ланцюгів постачання, для яких ці поняття дають однакові наслідки. Приклади показують, що цей клас строго менший, ніж клас, в якому ланцюгові стабільні розподіли є ефективними і незалежними від будь-яких коаліційних відхилень. Таке кооперативне поняття доповнюватиме подальші дослідження некооперативної реалізації ланцюгових стабільних розподілів.

Для ознайомлення з базовою формальною мовою і термінологією теорії (двостороннього) паросполучення розглянемо класичну задачу вступу до коледжів з чутливими перевагами [1], де дві скінченні множини студентів I

та коледжів (colleges) C мають сполучатися одна з одною. Кожний абітурієнт (потенційний студент) бажає отримати місце в одному з коледжів, а кожний коледж $c \in C$ має фіксовану верхню межу q_c на максимальне число студентів, яке він може прийняти. Студенти мають переваги щодо наявних коледжів, а також можливість не відвідувати коледж. Позначимо $R_I = (R_i)_{i \in I}$ профіль строгих переваг студентів. Нехай для кожного студента $i \in I$ бінарне відношення (relation) R_i є повним, рефлексивним, транзитивним, антисиметричним на $C \cup \{i\}$. Коледжі мають переваги щодо вступу класів студентів. Позначимо $R_C = (R_c)_{c \in C}$ профіль строгих переваг коледжів. Нехай для кожного коледжу $c \in C$ бінарне відношення R_c є повним, рефлексивним, транзитивним, антисиметричним на $I \cup \{c\}$. Припустимо, що переваги коледжів щодо груп студентів є чутливими до рейтингів окремих студентів [9]. Позначимо $(q_c)_{c \in C}$ вектор місткості коледжів. Те, що студент i надає слабку перевагу коледжу c щодо коледжу c', позначимо як $c\, R_i\, c'$; якщо при цьому $c \neq c'$, то студент i надає строгу перевагу (preference) коледжу c щодо коледжу c', що позначимо як $c\, P_i\, c'$. Те, що студент i надає строгу перевагу коледжу c щодо неотримання місця в якомусь коледжі взагалі (коледж c є прийнятним для студента i), позначимо як $c\, P_i\, i.$ Запис $P_i : c_1, \ldots, c_k$ означає, що $c_n P_i c_m$ при $n < m \leq k,$ а коледжі $c_1, \ldots, c_k$ є прийнятними для студента i.

Позначення переваг коледжів аналогічні позначенням переваг студентів. Коледж c має відношення строгої переваги P_c щодо окремих студентів (і можливості незаповнення місця), а також строгий рейтинг $P_c^{\#}$ на підмножинах I, чутливий до рейтингу P_c окремих студентів [9]:

$$(J \subset I\, ;\; i, j \in I \setminus J\,) \Rightarrow ((\, J \cup \{i\} P_c^{\#} (J \cup \{\, j\} \;\Leftrightarrow\; i\, P_c\; j\,) \wedge (\, J \cup \{i\} P_c^{\#}\, J \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; i\, P_c\, c).$$

Оскільки може бути кілька переваг щодо груп студентів, чутливих до того самого рейтингу окремих студентів, то беремо до уваги останній.

Паросполучення – це призначення студентів до коледжів, яке задовольняє обмеженням на місткості коледжів. Формально паросполучення є таким відображенням μ множини $I \cup C$ в саму себе, що: $\mu(i) \in C \cup \{i\}\;\; \forall i \in I;\;\; \mu(c) \subseteq I,$ $|\mu(c)| \leq q_c\;\; \forall c \in C;\;\; i \in \mu(c) \;\Leftrightarrow\; \mu(i) = c.$ Якщо $\mu(i) = i,$ то студент i є непризначеним за паросполученням $\mu.$ У моделях паросполучень з екстерналіями [10, 11] припускають, що агенти дбають лише про своїх власних партнерів у паросполученні, а тому їхні переваги щодо паросполучень конгруентні їхнім перевагам щодо потенційних партнерів. При фіксованих I, C, $(q_c)_{c\in C}$ задачу вступу до коледжів з чутливими перевагами задає профіль $R=(R_I,R_C)$.

Головна мета теорії паросполучень – передбачити, які відбуватимуться паросполучення, коли егоїстичні агенти формують партнерства. Для задачі R вступу до коледжів паросполучення є (попарно) стабільним [1], якщо:

$\mu(i)\,R_i\,i \;\; \forall i\in I$ (немає студента, який сполучається з неприйнятним коледжем);

$i\,P_c\,c \;\; \forall i\in\mu(c),\; \forall c\in C$ (немає коледжу, що відхиляє призначеного студента);

не існує такої пари (i,c), що $c\,P_i\,\mu(i) \;\wedge\; ((i\,P_c\,j$ для деякого $j\in\mu(c))\;\vee$ $\vee\;(i\,P_c\,c \;\wedge\; |\mu(c)|<q_c))$ (немає пари (i,c), яка блокує паросполучення μ).

Коли паросполучення не є стабільним, то агенти, переслідуючи свої мотиви, блокують його, формуючи нові партнерства. Зазначимо, що стабільність є поняттям кооперативного рішення, якого певним чином досягає ринок. Для області чутливих переваг стабільне паросполучення завжди існує, а попарна стабільність рівносильна стабільності ядра [2], тобто немає групи агентів, які блокують попарно стабільне паросполучення. Точніше, множина попарно стабільних паросполучень – це ядро, визначене слабким домінуванням. Паросполучення є ядром, коли немає групи агентів, які можуть отримати паросполучення, всі учасники якого надають йому слабку перевагу, причому принаймні один агент надає йому строгу перевагу, формуючи партнерства лише в межах групи. Стабільне паросполучення є ефективним відносно переваг студентів і коледжів. Два стабільних паросполучення в основі теорії паросполучень можна зайти двома варіантами DAA [1], на які спирається теорія двосторонніх паросполучень [4].

Варіант DAA з пропозиціями студентів (student proposing deferred acceptance algorithm, SDA) для даного R складається з таких кроків:

1) на кроці 1 кожний студент подає документи до прийнятного для себе коледжу зі своєю найвищою перевагою; кожний коледж c ставить q_c прийнятних для себе студентів зі своєю найвищою перевагою у свій список очікування, а решту студентів відхиляє; *t*) на кроці t абітурієнти, які були відхилені на кроці $(t-1)$, подають документи до прийнятного для себе коледжу зі своєю наступною найвищою перевагою; кожний коледж c ставить q_c прийнятних для себе студентів, з нових абітурієнтів і списку очікування, зі своєю найвищою перевагою у свій новий список очікування, а решту студентів відхиляє.

SDA завершує роботу, коли всі несполучені студенти запропонували всі прийнятні коледжі. Оскільки призначення визначаються за кілька кроків, то процедуру називать відтермінованим прийняттям. Для даної задачі R позначимо $f^I(R)$ паросполучення, вибране SDA. Паросполучення $f^I(R)$ є стабільним паросполученням, якому одностайно надають найбільшу перевагу студенти, але водночас є стабільним паросполученням, якому одностайно надають найменшу перевагу коледжі [1]: якщо $\tilde{\mu}$ – будь-яке стабільне паросполучення для задачі R, то $f_i^I(R) R_i \tilde{\mu}(i)$ $\forall i \in I$ та $\tilde{\mu}(c) R_c^{\#} f_c^I(R)$ $\forall c \in C$. При цьому будь-яке чутливе розширення R_C дає однаковий рейтинг стабільних паросполучень [12].

Для даного R варіант DAA з пропозиціями коледжів (college proposing deferred acceptance algorithm, CDA) міняє ролі студентів і коледжів:

1) на кроці 1 кожний коледж c пропонує вступ для q_c прийнятних для себе студентів зі своєю найвищою перевагою; кожний студент тимчасово тримається своєї пропозиції зі своєю найвищою перевагою і відхиляє всі інші пропозиції;

t) на кроці t кожний коледж c, який мав k своїх відхилених пропозицій на кроці $(t-1)$, пропонує вступ для $(q_c - k)$ прийнятних для себе студентів зі своєю найвищою перевагою у свій список очікування, які не відхилили принаймні одну зі своїх пропозицій на попередніх кроках; кожний студент i тимчасово тримається своєї пропозиції зі своєю найвищою перевагою серед тих, яких він тримався наприкінці кроку $(t-1)$, і тих, які він отримує на кроці t.

CDA завершує роботу, коли всі коледжі з незаповненими місцями запропонували вступ усім прийнятним студентам. Отже, призначення визначаються за декілька кроків. Позначимо $f^C(R)$ паросполучення, вибране CDA для задачі R. Це паросполучення має діаметрально протилежні властивості до $f^I(R)$ у тому сенсі, що $f^C(R)$ є стабільним паросполученням для R, найкращим для коледжів і найгіршим для студентів.

Важлива гілка літератури паросполучень стосується проектування централізованої розрахункової палати для ринків паросполучень. Інституцію централізованого паросполучення можна вважати (детерміністським) механізмом паросполучення, який збирає переваги від агентів для визначення паросполучень. Механізм паросполучення – це відображення f, яке пов'язує паросполучення з кожною задачею R. Зазначимо, що обмежуємося механіз-мами, які виявляють лише рейтинг окремих студентів від коледжів. Оскільки множина стабільних паросполучень залежить тільки від цього рейтингу, то таке обмеження не впливає на стабільні механізми з чутливими перевагами. Для даної задачі R позначимо $f_i(R)$ коледж, призначений студенту i відображен-ням f (якщо такий коледж є). Аналогічно позначимо $f_c(R)$ множину студентів, призначених коледжу c. Механізм паросполучення є стабільним, якщо він відбирає стабільне паросполучення для кожної задачі R: f^I – оптимальний для студентів стабільний механізм паросполучення (student optimal stable matching mechanism, SOSM), а f^C – оптимальний для коледжів стабільний механізм паросполучення (college optimal stable matching mechanism, COSM).

Оскільки переваги щодо потенційних партнерів типово є приватною інформацією, то механізм паросполучення має забезпечувати учасників правильними стимулами до розкриття їхньої приватної інформації. В ідеалі в найкращих інтересах учасника має бути правдиве подання його переваг, незалежно від його очікувань стосовно поведінки інших учасників. Механізм є стратегічно стійким, якщо немає задачі R, де якийсь студент або коледж може виграти від неправдивого подання своїх переваг. Формально це означає, що $\forall R$ $f_i(R) R_i\, f_i(R'_i, R_{-i})$ $\forall i \in I$, $\forall R'_i$, а також $f_c(R) R_c^{\#}\, f_c(R'_c, R_{-c})$ $\forall c \in C$, $\forall R'_c$. Проте стабільний механізм не може завжди забезпечувати всіх учасників стимулами домінантної стратегії для правдивого розкриття їхніх переваг [13]. Для загального класу задач паросполучень, що включають модель шлюбу як окремий випадок, стратегічно стійкий і стабільний механізм паросполучення існує тоді й тільки тоді, коли множина стабільних паросполучень є синглтоном [14]. Досліджено слабші поняття сумісності стимулів, а також втілюваність рівноваг Неша у під-розв'язках стабільного правила [15 – 17]. Розроблено два простих послідовних механізми, що втілюють множину стабільних паросполучень у досконалій рівновазі підігор [18]. Однак у деяких застосуваннях здатності неправдивого подання своїх переваг не є симетричними між двома ринковими сторонами. Наприклад, коледжі часто спираються у своїх рішеннях вступу на перевірювані характеристики студентів, скажімо, результати у стандартизованих тестах, а тому мають незначні можливості для стратегічної маніпуляції після оголошення критеріїв вступу. SOSM f^I є стратегічно стійким для студентів [13, 19], тобто $\forall R$ $f_i^I(R) R_i\, f^I(R'_i, R_{-i})$ $\forall i \in I$, $\forall R'_i$. Показано, що SOSM – єдиний стабільний механізм, який є стратегічно стійким для студентів [20].

Аналогічного результату немає для коледжів [9]: іноді для коледжів буває вигідним подавати до COSM неправильні рейтинги окремих студентів, коли коледжі мають право вказувати лише свої рейтинги окремих студентів або повністю свої переваги на підмножинах студентів. Контрприклад [9] показує, що коледжі можуть маніпулювати рейтингами, коли механізм паросполучення виявляє лише рейтинги окремих студентів.

Задача вибору школи при строгих пріоритетах [21] концептуально майже тотожна задачі вступу до коледжів. Єдина й основна відмінність полягає у тому, що замість переваг щодо вступу класів студентів коледжі (школи) мають екзогенно визначене пріоритетне впорядкування студентів. Останнє може бути наслідком, наприклад, тестових балів або таких соціальних критеріїв, як відстань до школи. Формально задачу вибору школи задають скінченні множини I та S учнів та шкіл відповідно, вектор $q = (q_c)_{c \in C}$ місткості шкіл (припущення про те, що остання перевищує число учнів [21], є несуттєвим), профіль строгих пріоритетних упорядкувань $\succ = (\succ_s)_{s \in S}$ шкіл, профіль строгих упорядкувань $R = (R_i)_{i \in I}$ учнів при виборі школи.

Задача вибору школи має таку ж інтерпретацію, як задача вступу до коледжів, за винятком пріоритетного упорядкування $\succ_s$ шкіл s, яке строго впорядковує множину I учнів: для учнів $i, i' \in I$ запис $i \succ_s i'$ означає, що школа s має вищий пріоритет для учня i, ніж для учня i'. Наприклад, коли школи визначають пріоритети за відстанню до школи, то $i \succ_s i'$ означає, що i проживає до школи s ближче, ніж i'. Для фіксованих множин I та S, вектора q, пріоритетної структури $\succ = (\succ_s)_{s \in S}$ задача вибору школи задається профілем R переваг учнів. Паросполучення визначається так само, як у задачі вступу до коледжів, а механізм паросполучення є відображенням, яке визначає паросполучення для кожної задачі вибору школи (кожного профілю R). Часто під паросполученням розуміють відображення з множини I на множину S, щоб наголосити на тому, що в задачі вибору школи останні є об'єктами. Оскільки учні володіють приватною інформацією, то згаданий механізм є стратегічно стійким, якщо він стратегічно стійкий для учнів.

Як і в задачі вступу до коледжів, головна мета публікацій стосовно задач вибору школи – проектувати механізми паросполучення, які задовольняють певним бажаним властивостям. Задача вступу до коледжів відрізняється тим, що в ній стабільність пов'язувалася з обмеженням, якому має задовольняти механізм паросполучення для того, щоб гарантувати впорядковану участь студентів. У задачі вибору школи є декілька конкуруючих бажаних властивостей, запропонованих у відповідних публікаціях.

Насамперед, для даної задачі вибору школи R паросполучення μ є ефективним, коли не існує іншого паросполучення $\tilde{\mu}$ такого, що $\tilde{\mu}(i) R_i \mu(i) \;\; \forall i \in I$, $\tilde{\mu}(i) P_i \mu(i)$ для деякого $i \in I$. Оскільки школи є об'єктами, то ефективність стосується лише переваг учнів. Механізм паросполучення ефективний, якщо відбирає ефективне паросполучення для кожної задачі вибору школи. Найчастіше для задач вибору школи використовується так званий Бостонський ефективний механізм паросполучення з особливою пріоритетною структурою для громадських шкіл м. Бостон (США) [21]. Цей механізм не залежить від конкретної пріоритетної структури.

В М. Горбачук, Г.О. Шулинок

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ПАРОСОЧЕТАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТУПЛЕНИЯ
В УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

Представлены алгоритмы поиска стабильных паросочетаний для двух классов участников, каждый из которых имеет рейтинг другого класса.

V.M. Gorbachuk

THE SEARCH ALGORITHMS OF MATCHING FOR A COLLEGE ADMISSION PROBLEM

The algorithms of search stable matching for two classes of agents where every agent has ranking for another class.

1. *Gale D., Shapley L.* College admissions and the stability of marriage // American mathematical monthly. – 1962. – 69. – P. 9–15.
2. *Roth A., Sotomayor M.* Two sided markets – a study in game theoretic modeling. – Cambridge University Press, 1991.
3. *Горбачук В.М.* Моделювання вступу до університетів України 2015 р. // Сучасні проблеми управління підприємством: теорія і практика. – Харків: ХНЕУ, 2015.
4. *Roth A.* Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions // International journal of game theory. – 2008. – 36. – P. 537 – 569.
5. *Наказ* Міністерства освіти і науки України № 1172 «Умови прийому на навчання до вищих навчальних закладів України в 2015 році» від 15 жовтня 2014 року.
6. *Доценко С.И.* Математические модели стабильных размещений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – 2 (112). – С. 3 – 13.
7. *Шарифов Ф.* Задача нахождения непересекающихся и несовпадающих циклов на сети // Теорія оптимальних рішень. – 2003. – 1. – С. 155 – 161.
8. *Ostrovsky M.* Stability in supply chain networks // American economic review. – 2008. – P. 897 – 923.
9. *Roth A.* The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem // Journal of economic theory. – 1985. – 36. – P. 277 – 288.
10. *Dutta B., Masso J.* Stability of matchings when individuals have preferences over colleagues // Journal of economic theory. – 1997. – 75. – P. 464 – 475.
11. *Echenique F., Yenmez B.* A solution to matching with preferences over colleagues // Games and economic behavior. – 2007. – 59. – P. 46 – 71.
12. *Roth A., Sotomayor M.* The college admissions problem revisited // Econometrica. – 1989. – P. 559 – 570.
13. *Roth A.* The economics of matching: stability and incentives // Mathematics of operations research. – 1982. – 7. – P. 617–628.
14. *Sonmez T.* Strategy-proofness and essentially single-valued cores // Econometrica. – 1999. – 67. – P. 677 – 689.
15. *Kara T., Sonmez T.* Nash implementation of matching rules // Journal of economic theory. – 1996. – 68. – P. 425 – 439.
16. *Kara T., Sonmez T.* Implementation of college admission rules // Economic theory. – 1997. – 9. – P. 197 – 218.
17. *Sonmez T.* Games of manipulation in marriage problems // Games and economic behavior. – 1997. – 20. – P. 169 – 176.
18. *Alcalde J., Romero-Medina A.* Simple mechanisms to implement the core of college admissions problems // Games and economic behavior. – 2000. – P. 294 – 302.
19. *Dubins L., Freedman D.* Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm // American mathematical monthly. – 1981. – 88. – P. 485 – 494.
20. *Alcalde J., Barbera S.* Top dominance and the possibility of strategy-proof stable solutions to matching problems // Economic theory. – 1994. – 4. – P. 417 – 435.
21. *Abdulkadiroglu A., Sonmez T.* School choice – a mechanism design approach // American economic review. – 2003. – 93 (3). – P. 729 – 747.

Одержано 26.02.2015