УДК 519.8

А.П. ЛИХОВИД

О РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОЙ УПАКОВКИ

Рассматривается параллельная реализация метода мультистарта для нахождения решений задач равновесной упаковки неодинаковых кругов в круг наименьшего радиуса. Приведены результаты решения задачи на вычислительном кластере в системе MPI. Для вычислительных экспериментов использовался кластер Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины СКИТ.

Введение. В данной статье рассматривается параллельная реализация алгоритма для нахождения решений задачи равновесной упаковки неодинаковых кругов в круг наименьшего радиуса, описанной в работе [1]. Задача равновесной упаковки неодинаковых кругов в круг наименьшего радиуса возникает в задачах плотной упаковки параллельных одинаковых по высоте круговых цилиндров в цилиндрический контейнер при ограничениях на динамическое равновесие системы [2, 3]. Динамическое равновесие определяется требованием, чтобы центр тяжести системы круговых цилиндров находился в центре кругового контейнера.

Математическая модель задачи равновесной упаковки неравных кругов может быть сформулирована в виде различных многоэкстремальных задач математического программирования [4]. Одна из данных формулировок – это предмет исследования в данной работе. Для нее приводится алгоритм нахождения ее глобального оптимального решения, который базируется на использовании параллельной реализации метода мультистарта, в котором для поиска локальных решений выбран r-алгоритм Шора [5].

Также приведены результаты вычислительных экспериментов. Для вычислительных экспериментов использовался кластер Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины СКИТ (суперкомпьютер для реализации информационных технологий) [6].

Математическая модель задачи. Имеется семейство кругов S_i с радиусами r_i и весами w_i, $i = 1,\ldots,m$. Полагаем, что центр тяжести круга S_i находится в его центре. Равновесной упаковкой семейства кругов S_i, $i = 1,\ldots,m$, в круг S назовем такую их упаковку, чтобы радиус круга S был минимальным и центр тяжести семейства кругов S_i, $i = 1,\ldots,m$, совпадал с центром круга S.

Не ограничивая общности будем считать, что центр круга S находится в начале неподвижной системы координат. Пусть (x_i, y_i) – неизвестный центр круга S_i, r – неизвестный радиус круга S. Обозначим известные величины $\lambda_i = w_i / \sum_{i=1}^{m} w_i$, $i = 1,\ldots,m$, и очевидную нижнюю границу на искомый радиус $r_{low} = \max\limits_{i=1,\ldots,m} r_i$. Тогда равновесной упаковке семейства кругов S_i, $i = 1,\ldots,m$, соответствует многоэкстремальная задача нелинейного программирования:

$$r^* = \min_{r,x,y} r \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \le (r - r_i)^2, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \ge (r_i + r_j)^2, \quad 1 \le i < j \le m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0, \tag{4}$$

$$r \ge r_{low}, \tag{5}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_m)$, $y = (y_1,\ldots,y_m)$.

С помощью негладких штрафов задачу (1) – (5) можно свести к задаче безусловной минимизации негладкой штрафной функции. Тогда алгоритм поиска наилучшего решения задачи (1) – (5), основанный на методе мультистарта, состоит в следующем. Для заданного набора стартовых точек осуществляется поиск локальных минимумов негладкой штрафной функции с помощью модификации r-алгоритма. Наилучший из локальных минимумов функции, для которого штрафная функция близка к нулю, принимается за решение задачи (1) – (5).

Параллельная реализация метода мультистарта. Метод мультистарта для нахождения глобального оптимального решения многоэкстремальной задачи можно представить в виде следующей процедуры: с помощью алгоритмов локального поиска находятся оптимальные локальные решения с различных начальных точек, генерируемых случайным или детерминированным образом, и среди полученных решений выбирается наилучшее (минимальное или максимальное). При достаточно большом количестве запусков поиска локальных решений есть вероятность найти глобальное оптимальное решение. Очевидно, что этот метод является существенно трудоемким, но при этом его легко можно распараллелить и реализовать вычисления, например, на кластере.

В данной работе для параллельной реализации метода мультистарта использовалась процедура «Master-Slave» [7]. Решение задачи проводится на p процессорах. Сгенерированная случайным образом в «ведущем» (Master) процессоре начальная точка передается на любой другой свободный $(p-1)$ (Slave) процессор с помощью операции пересылки системы MPI. Там происходит вычисление локального оптимального решения для этой начальной точки с помощью r-алгоритма. Затем найденное оптимальное решение передается в «ведущий» процессор, где происходит сравнение полученного оптимального решения с наилучшим из найденных до этого момента значением («рекордом»). Если текущее решение меньше «рекорда», то оно становится «рекордом». По истечении заданного количества запусков поиска локального решения значение «рекорда» принимается за решение исходной задачи. Дополнительно значение «рекорда» используется для генерации начальных точек в круге радиуса равного этому значению.

Приведенный параллельный метод мультистарта был реализован на языке программирования C++ в программной среде MPI. Для нахождения локальных решений многоэкстремальной задачи использовался $r(\alpha)$-алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивной регулировкой шага в направлении нормированного антисубградиента. Начальные точки для метода мультистарта генерировались случайным образом с помощью генератора равномерного распределения в круге заданного радиуса, который последовательно уточнялся по мере нахождения лучшего локального минимума. В качестве генератора псевдослучайных чисел в интервале $[0,1]^n$ использовалась реализация эффективного алгоритма, который называется «Вихрь Мерсенна» [8].

Далее приводятся результаты численных экспериментов на кластерном комплексе СКИТ Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины для решения одной задачи равновесной упаковки [1].

Вычислительный эксперимент. Вычислительные эксперименты проводились для вышеописанной задачи со следующими параметрами:

m=40;

r_i =[106 112 98 105 93 103 82 93 117 81 89 92 109 104 115 110 114 89 82 120 108 86 93 100 102 106 111 107 109 91 111 91 101 91 108 114 118 85 87 98];

w_i =[11 12 9 11 8 10 6 8 13 6 7 8 11 10 13 12 12 7 6 14 11 7 8 10 10 11 12 11 11 8 12 8 10 8 11 12 13 7 7 9].

Для данного примера вначале выполнялось исследование параллельного ускорения и эффективности алгоритма. Параллельное ускорение вычисляется по формуле $S_i = t_0 / t_i, i = 1,\ldots,n$, где t_0 – время работы последовательного алгоритма, а t_i – время решения задачи параллельным алгоритмом с использованием i процессоров. Эффективность параллельного алгоритма вычисляется по формуле

$E_i = S_i / i$. Для этого исследования количество генерируемых точек для метода мультистарта и, соответственно, запусков поиска локального решения равнялось 50. Общее количество процессоров кластера варьировалось от 1 до 24.

Результаты исследования параллельного ускорения и эффективности для тестовой задачи представлены в табл.1 и на рисунке. Здесь n – общее число процессоров, t – время решения задачи в секундах, S_i – параллельное ускорение, E_i – эффективность параллельного алгоритма. На рисунке показана зависимость времени решения тестового примера от количества использованных процессоров. Из табл. 1 и рисунка видно, что, например, для четырех процессоров время решения задачи уменьшается в 2,65 раза, для восьми – в 5,38 раза, шестнадцати – в 7,87 раза, а для двадцати четырех – в 9,37 раза. Начиная с количества процессоров равного 12, дальнейшее добавление процессоров не влияет существенно на время решения задачи.

ТАБЛИЦА 1. Время решения, параллельное ускорение и эффективность для первого вычислительного эксперимента

n	t	S_i	E_i
1	26.51	1.00	1.00
2	26.71	0.99	0.50
3	15.05	1.76	0.59
4	10.01	2.65	0.66
5	7.94	3.36	0.67
8	4.92	5.38	0.67
12	3.20	8.27	0.69
16	3.37	7.87	0.49
20	2.32	11.45	0.57
24	2.83	9.37	0.39

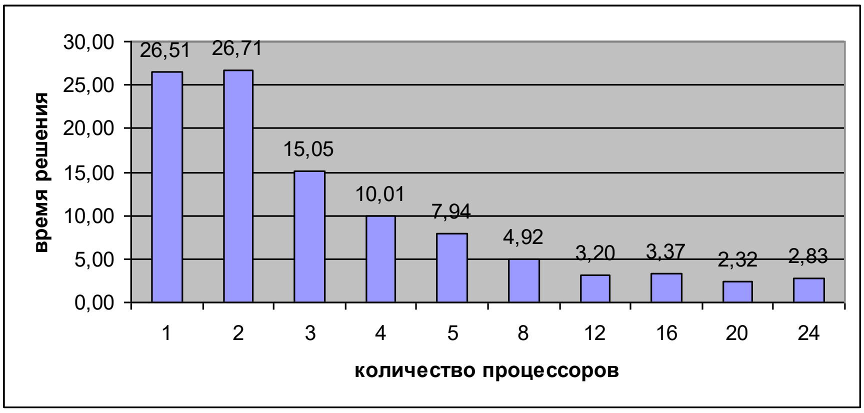

РИСУНОК. Зависимость времени решения от количества процессоров

Вторым вычислительным экспериментом был запуск программы для решения тестового примера для большого количества начальных точек. Проведено два расчета на кластере СКИТ-3. В-первом количество генерируемых точек было выбрано 10000, а во втором – 100000. В обоих случаях количество процессоров равнялось 24. В табл. 2 приведены найденные лучшие оптимальные значения радиусов и времена нахождения решений.

ТАБЛИЦА 2. Время решения и полученные оптимальные значения для второго вычислительного эксперимента

Количество генерируемых точек	Полученные оптимальные значения	Времена нахождения решений (сек)
10000	715.61	360
100000	714.91	4665

Как видно из табл. 2 в результате вычислительных экспериментов найдено рекордное решение со значением оптимального радиуса 714.91.

Заключение. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают возможность применения параллельной реализации метода мультистарта для нахождения решений практических задач равновесной упаковки. Эту реализацию можно улучшить, используя более совершенные схемы генерации начальных точек. В настоящее время разрабатывается программное обеспечение для решения задач равновесной упаковки на кластере СКИТ.

О.П. Лиховид

ПРО РЕАЛІЗАЦІЮ ПАРАЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РІВНОВАЖНОЇ УПАКОВКИ

Розглядається паралельна реалізація методу мультистарта для знаходження розв'язків задач рівноважної упаковки неоднакових кіл у коло найменшого радіуса. Наведено результати розв'язання задачі на обчислювальному кластері в системі MPI. Для обчислювальних експериментів використовувався кластер Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України СКІТ.

O.P. Lykhovyd

ON IMPLEMENTATION OF PARALLEL ALGORITHM FOR SOLVING BALANCE CIRCULAR PACKING PROBLEMS

A parallel implementation of multistart method for finding solutions of problems of balance circular packing unequal circles into a circle of least radius is considered. The results of solution of the

problem on a computing cluster in MPI system are presented. For the computational experiments a cluster of the Institute of Cybernetics SCIT was used.

1. *Стецюк П.И., Романова Т.Е., Коваленко А.А.* Комп'ютерна програма Balance circular packing // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 55689. Україна. Міністерство освіти і науки. Державний департамент інтелектуальної власності. – Дата реєстрації 21.07.2014.
2. *Коваленко А.А., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Стецюк П.И.* Упаковка круговых цилиндров в цилиндрический контейнер с учетом специальных ограничений поведения системы // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1(111). – С. 126 – 134.
3. *Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical Models of Placement Optimisation: Two- and Three-Dimensional // In book «Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications» / G. Fasano, J.D. Pinter, eds. – Springer. – New York. – 2012. – P. 363 –388.
4. *Ненахов Э.И., Романова Т.Е., Стецюк П.И.* Равновесная упаковка кругов в круг минимального радиуса // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2013. – С. 143 – 153.
5. *Шор Н.З., Стецюк П.И.* Использование модификации *r*-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28 – 49.
6. *Кластерный* комплекс Института кибернетики. Кластерный комплекс СКИТ. https://icybcluster.org.ua/.
7. *Mersenne* Twister home page, with C code. http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html
8. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.

Получено 10.03.2015