УДК 519.1

М.Ф. СЕМЕНЮТА

ГРАЦИОЗНОСТЬ ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

С использованием конструктивных и аналитических методов решается задача существования грациозной разметки для одноциклических графов. Доказана грациозность некоторых представителей этого класса графов.

Введение. Разметка графа – это назначение вершинам или ребрам, или одновременно вершинам и ребрам, целых чисел при определенных условиях. Данная работа посвящена изучению грациозной разметки графа. Этот тип разметки первоначально введен Роса в 1966 году, как β-оценка, для решения задачи разложения полного графа на изоморфные подграфы. Название «грациозная разметка» предложено Голомбом [1] в 1972 году и «правильная нумерация» Шеппардом [2] в 1976 году. Грациозные разметки нашли применение во многих областях, таких как теория чисел, теория кодирования, радиолокация, радиоастрономия, схемотехника. Это послужило толчком к интенсивному развитию указанного направления.

В 1984 году Трасжинский [3] предположил, что все одноциклические графы, кроме C_n с $n \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ и $n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$, являются грациозными. Учитывая огромное разнообразие одноциклических графов возникает сложность в доказательстве данной гипотезы или ее опровержении. Более детально изучены циклы, у которых ко всем или к нескольким вершинам прикреплены висячие ребра. Фрахт [4] доказал грациозность короны $C_n \square K_1$. Его результаты обобщили независимо авторы работ [5, 6] на графы $C_n \square mK_1$. C_n^t представляет класс графов, образованных присоединением по одному висячему ребру к t вершинам цикла C_n, где $1 \le t \le n$. В 1989 году Руп и Гальян предположили, что все представители данного класса – грациозные графы. Эта гипотеза доказана в [7].

Задача перечисления грациозных разметок графа сформулирована в работе [8]. Ее авторы остановились на рассмотрении частного случая, выделили для $C_n \odot K_1$ три рода разметок и показали, что все грациозные короны $C_n \odot K_1$ можно получить с помощью разметок 2-го рода. В одной из последних работ [9] по данной тематике за 2014 год доказано, что все короны $C_n \odot K_1$ с $n \equiv 3$ или 4(mod8) имеют грациозную разметку 1-го рода. В настоящее время учитывая широкое использование систем программирования, появились новые возможности для решения задачи перечисления. Однако, как и первоначально, это направление связано с разработкой методов перечисления разметок для представителей определенных классов графов.

В данной статье продолжено изучение грациозности одноциклических графов. Предметом исследования является задача существования грациозной разметки у некоторых представителей класса одноциклических графов. Для ее решения применяем два подхода: конструктивный и аналитический. Первый заключается в нахождении грациозной разметки непосредственно построением или с помощью формул, второй – получение грациозного графа из некоторого класса графов с известными разметками, наложением дополнительных условий.

Рассмотрим конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Под порядком графа понимаем число его вершин, а под размером – число ребер. Для некоторых графов используем стандартные обозначения: P_n – цепь порядка n, C_n – цикл порядка n.

Инъективную функцию f: $V \to \{0, 1, 2, \dots , q\}$ называют грациозной разметкой графа $G = (V, E)$ размера q, если она индуцирует такую реберную разметку $f^* : E \to \{1, 2, \dots , q\}$, что f^* – биекция и $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ для любых смежных вершин u, $v \in V(G)$. Граф G – грациозный, если он допускает грациозную разметку f.

Очевидно, любой грациозный граф G размера q содержит вершины с метками 0 и q, и эти вершины смежные. Необходимое условие грациозности графа $G = (V, E)$ вытекает непосредственно из определения и заключается в том, что если G – грациозный граф, то $|V(G)| \leq |E(G)| + 1$. Данное условие выполняется для каждого связного графа. Используя его, можно исключить существование грациозной разметки для некоторых несвязных графов, например, 1-регулярных графов с $q > 1$. Один из методов построения грациозной разметки графа основан на применении известной грациозной разметки его подграфов. Чаще всего в качестве подграфов выступают деревья. В этом случае будут полезными определение 1 и теоремы 1, 2.

Определение 1 [10, 11]. Дерево T называется 0-*поворотным*, если для каждой вершины $v \in V(T)$, существует грациозная разметка f дерева T с $f(v) = 0$.

Теорема 1 [12]. Цепь P_n является 0-поворотным деревом для всех n.

Теорема 2 [13]. Пусть $n \geq 8$, тогда для любой вершины $v \in V(P_n)$ и для всех k с $0 \leq k \leq n - 1$ существует грациозная разметка f цепи P_n с $f(v) = k$.

Рассматриваемые в данной работе графы являются надграфами циклов. Цикл принадлежит к классу эйлеровых графов. Связный граф G размера q будет эйлеровым, если $q > 0$ и степень каждой вершины G четная. Необходимое условие существования грациозной разметки эйлерова графа доказано Роса: пусть G – граф размера q, все вершины которого имеют четную степень (если G является связным, то он будет эйлеровым), если G – грациозный граф, то $q \equiv 0$ или $3(\mathrm{mod}4)$ [12]. Этот критерий четности позволяет отбросить определенные семейства графов из исследования на грациозность. Для цикла C_n необходимое условие является также и достаточным: цикл C_n грациозный тогда и только тогда, когда $n \equiv 0$ или $3\ (\mathrm{mod}4)$ [12]. Если $n \equiv 1, 2(\mathrm{mod}4)$, тогда цикл C_n не допускает грациозной разметки. Учитывая вышеизложенное Роса доказал более общее утверждение: если G – эйлеров граф с q ребрами, где $q \equiv 1, 2(\mathrm{mod}4)$, тогда не существует грациозной разметки G. В следующей теореме описана процедура сохранения реберных меток при заданной вершинной разметке.

Теорема 3 [14]. Пусть граф $G = (V, E)$ имеет грациозную разметку $f\colon V \to \{0, 1, 2, \ldots, |E|\}$ и d – любое натуральное число. Тогда разметка $f'\colon V \to \{d, 1 + d, 2 + d, \ldots, |E|+d\}$, $f'(v) = f(v) + d$ индуцирует те же реберные метки, что и f.

Грациозность цикла C_n Роса получил конструктивно, представив одну его грациозную разметку для каждого допустимого n. Цикл – это частный случай одноциклических графов. Работы [3, 4, 15] связаны одной идеей нахождения условий грациозности и способов построения грациозной разметки одноциклических графов. В данной работе будем исследовать на грациозность одноциклический граф $G = P_n + u_iu_j$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$ и u_i, u_j – произвольные несмежные вершины цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Теорема 4. Любой одноциклический граф $G = P_n + u_iu_{i+2}$, где $P_n = (u_1, u_2, \ldots, \ldots, u_n)$ и $i = 1, 2, \ldots, n - 2$, является грациозным для $n \geq 3$.

Доказательство. $G = P_n + u_iu_{i+2}$ представляет собой одноциклический граф, его порядок и размер совпадают: $|V(G)| = |E(G)| = n$. Будем учитывать, что $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Рассмотрим вершинную разметку f графа G.

Для $n = 3$ получаем цикл C_3, т. е. $G = P_3 + u_1u_3 = C_3$. Пусть $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 2$, $f(u_3) = 3$, тогда разметка f – это грациозная разметка $G = C_3$.

Для цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ при $n \geq 4$ зададим следующую вершинную разметку φ: $0, n, 1, n - 1, 2, \ldots$. Будем считать $f(u_k) = \varphi(u_k)$ для всех вершин u_k графа G, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда абсолютная величина разности меток концевых вершин ребра u_iu_{i+2} графа G равна 1. Остальные метки ребер графа G, индуцированные разметкой f, образуют множество $\{2, 3, \ldots, n\}$. По определению, разметка f для графа G – грациозная. Теорема доказана.

Частный случай графа G из теоремы 4 относится к классу графов $G = P_n + u_1u_i = D_i(n - i)$, где $i = 3, 4, \ldots, n - 1$, называемых драконами. Известно [3], что эти графы грациозные для всех $n \geq 3 + i$. Аналогичным будет условие грациозности для драконов $G = P_n + u_iu_n$, $i = 2, 3, \ldots, n - 2$.

Авторы [15] заинтересовались задачей перечисления различных грациозных разметок графа. Они разработали алгоритм их поиска для C_n и обнаружили некоторые свойства грациозных графов. В работе [16] этот алгоритм обобщен на случай одноциклического графа $K_{1,\, m-1} \oplus C_4$. В ходе доказательства теоремы 4 и следствия из нее найдена одна из грациозных разметок одноциклического графа G, содержащего в качестве подграфов цепь P_n и цикл C_4. Эти результаты также можно использовать для создания алгоритма поиска грациозных разметок G.

Теорема 5. Пусть граф G получен отождествлением произвольной вершины u_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$ цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с вершиной цикла C_4. Тогда G грациозный для любого $n \geq 8$.

Доказательство. Пусть $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и вершина $v_1 = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – общая для цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и графа G. Учитываем, что порядок и размер G совпадают и равны числу $n + 3$. Согласно теоремы 2, для любой вершины u_i цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ при $n \geq 8$, существует грациозная разметка φ с $\varphi(u_i) = 1$. Для цепи функция φ будет биекцией из множества вершин на множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Зададим вершинную разметку f графа G. Будем назначать вершинам u_1, $u_2, \ldots, u_n$ метки из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, таким образом, что $f(u_1) = \varphi(u_1) + 1$, $f(u_2) = \varphi(u_2) + 1, \ldots, f(u_n) = \varphi(u_n) + 1$. По теореме 3, для ребер цепи P_n, рассматриваемой в качестве подграфа графа G, разметка f индуцирует метки $1, 2, .., n-1$. Так как $u_i = v_1$, то $f(v_1) = f(u_i) = \varphi(u_i) + 1 = 2$. Далее зададим $f(v_2 = n + 3$, $f(v_3) = 0$, $f(v_4) = n + 2$. По определению грациозной разметки имеем: $f^*(v_1v_2) = n + 1$, $f^*(v_1v_4) = n$, $f^*(v_2v_3) = n + 3$, $f^*(v_3v_4) = n + 2$. Таким образом, f представляет собой инъективную функцию из множества вершин графа G в множество $\{0, 1, 2, ..., \ldots, n + 2, n + 3\}$, порождающую биективную функцию из множества ребер графа G на множество $\{1, 2, ..., n-1, n, n + 1, n + 2, n + 3\}$. По определению, разметка f для графа G – грациозная. Теорема доказана.

Следствие. Пусть граф G получен отождествлением вершины u_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$ цепи $P_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с вершиной цикла C_4. Существует такая вершина u_i, что G – грациозный для любого $n \geq 1$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4, если учесть, что цепь P_n имеет грациозную разметку для любого $n \geq 1$.

Инструментом в доказательстве теорем 6 и 7 послужило условие грациозности дерева, рассматриваемого в качестве подграфа некоторых представителей класса одноциклических графов.

Теорема 6. Пусть T – грациозное дерево порядка n с не смежными вершинами u и w, помеченными метками 0 и 1. Граф G, полученный отождествлением концов цепи P_3 с вершинами u и w, является грациозным для любого $n \geq 2$.

Доказательство. Если $n = 2$, то граф $G = C_3$ – грациозный, если $n = 3$, то $G = C_4$ также будет грациозным графом. Пусть $n \geq 4$ и для дерева T существует грациозная разметка φ с $\varphi(u) = 0$, $\varphi(w) = 1$, где u и w – не смежные вершины T. Тогда, вершины u, w являются концами цепи $P_3 = (u, v, w)$ в графе G. Зададим разметку f графа G следующим образом: $f(x) = \varphi(x)$ для любой вершины $x \in V(G) - \{v\}$ и $f(v) = n + 1$. Тогда функция f представляет собой инъекцию из множества вершин графа G в множество чисел $\{0, 1, \ldots, n - 1, n, n + 1\}$. Отметим, что число n не будет использовано при указанной вершинной разметке f. Все индуцированные f, метки ребер различные и образуют множество $\{1, 2, \ldots, n - 1, n, n + 1\}$. Следовательно G – грациозный граф. Теорема доказана.

К грациозным деревьям, удовлетворяющим условию теоремы 6, относятся, в частности цепи, гусеницы, фейерверки, банановые, оливковые, симметричные деревья.

Теорема 7. Если T – грациозное дерево порядка n с концевой вершиной u, имеющей метку $n - 1$, тогда существует такая вершина $v \in V(T)$, что граф $G = T + uv$ – грациозный для всех $n \geq 3$.

Доказательство. Пусть φ – грациозная разметка дерева T с $\varphi(u) = n - 1$, порождающая разметку ребер φ^*. Как отмечалось выше, вершины с меткой 0 и $n - 1$ будут смежными в любом грациозном графе.

При $n = 3$ получаем $T = P_3 = (u, w, v)$. Так как цепь P_3 представляет собой 0-поворотное дерево, то можно считать $\varphi(u) = 2$. Тогда $\varphi(v) = 1$ и $\varphi(w) = 0$. Рассмотрим вершинную разметку f графа $G = P_3 + uv$: $f(u) = \varphi(u) + 1 = 3$, $f(w) = \varphi(w) = 0$, $f(v) = \varphi(v) = 1$. Она индуцирует метки ребер 1, 2, 3 в графе G. Значит разметка f – грациозная для $G = P_3 + uv$.

В случае $n \geq 4$, зададим разметку вершин f графа $G = T + uv$ следующим образом: $f(x) = \varphi(x)$ для любой вершины $x \in V(G) - \{u\}$ и $f(u) = n$. Для дерева T грациозная разметка φ – биекция. Таким образом, T содержит вершину v с меткой 1, тогда $f(v) = \varphi(v) = 1$. Также T содержит вершину w для которой $\varphi(w) = f(w) = 0$, $uw \in E(T)$. Вершинная разметка f в графе G представляет собой инъекцию в множество $\{0, 1, \ldots, n - 1, n\}$ и порождает разметку ребер f^*такую, что $f^*(e) = \varphi^*(e)$ для каждого ребра $e \in E(G) - \{uv, uw\}$ и $f^*(uv) = n - 1$, $f^*(uw) = n$. Все индуцированные f метки ребер графа G различные и образуют множество $\{1, 2, \ldots, n - 1, n\}$. Следовательно, $G = T + uv$ – грациозный граф. Теорема доказана.

Заключение. В результате проведенного исследования расширено множество одноциклических грациозных графов. Описаны два подхода к решению задачи грациозности графа: конструктивный и аналитический.

М.Ф. Семенюта

ГРАЦІОЗНІСТЬ ОДНОЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ

Із застосуванням конструктивних та аналітичних методів розв’язується задача існування граціозної розмітки для одноциклічних графів. Доведено граціозність деяких представників цього класу графів.

M.F. Semenyuta

GRACEFULNESS OF UNICYCLIC GRAPHS

Constructive and analytical methods are used to solve the graceful labelling existence problem for unicyclic graphs. Gracefulness of some types of unicyclic graphs is proven.

1. *Golomb S.W.* How to Number a Graph, Graph Theory and Computing. – (ed. R.C. Read), Academic Press, New York, 1972. – 23. – 37 p.
2. *Sheppard D.A.* The factorial representation of balanced labelled graphs // Discrete Math. – 1976. – Vol. 15. – P. 379 – 388.
3. *Truszczynski M.* Graceful unicyclic graphs // Demonstatio Mathematica. – 1984. – Vol. 17. – P. 377 – 387.
4. *Frucht R.W.* Graceful numbering of wheels and related graphs // Ann. NY Acad. Sci. – 1979. – Vol. 319. – P. 219 – 229.
5. *Barrientos C.* Graceful labeling of chain and corona graphs // Bull. inst. combin. Appl. – 2002, Vol. 34. – P. 17 – 26.
6. *Bu C., Zhang D., He B.* k-Gracefulness of C_n^m // J. Harbin Shipbuilding Eng. Ins. – 1994. – Vol. 15. – P. 95 – 99.
7. *Kang Q.D., Liang Z.-H.,Gao Y.-Z., Yang G.-H.* On the labeling of some graphs // J. Combin. Math. Combin. Comput. – 1996. – Vol. 22. – P. 193 – 210.
8. *Frucht R., Harary F.* On the corona of two graphs // Aequat. Math. – 1970. – Vol. 4. – P. 322 – 325.
9. *Graf A.* A new graceful labeling for pendant graphs // Aequat. Math. – 2014. – Vol. 87. – P. 135 – 145.
10. *Bloom G.S.* A chronology of the Ringel-Kotzig conjecture and the continuing quest to call all trees graceful // Ann. N.Y. Acad. Sci. – 1979. – Vol. 326. – P. 32 – 51.
11. *Chung F.R.K., Hwang F.K.* Rotatable graceful graphs // Ars Combinatoria. – 1981. – Vol. 11. – P. 239 – 250.
12. *Rosa A.* Labelling snakes // Ars Combinatoria. – 1977. – Vol. 3. – P. 67 – 74.
13. *Flandrin E., Fournier I., Germa A.* Graceful enumerations of paths // Ars Combinatoria. – 1983. – Vol. 16. – P. 149 – 181.
14. *Koh K.M., Tan T., Rogers D.G.* Interlaced trees: a class of graceful trees // Combinatorial Mathematics, VI (Proc. Sixth Austral. Conf., Univ. New England, Armidale, 1978). – 1979. – Vol. 748. – P. 65 – 78.
15. *Abhyankar V.J.* Direct methods of gracefully labeling graphs // Ph.D. thesis, University of Mumbai. – 2002.
16. *Bagga J., Heinz A., Majumber M.M.* An algorithm for graceful labelings of cycles // Congressus Numerantium. – 2007. – Vol. 186. – P. 57 – 63.
17. *Max P.B., Bagga J., Fotso L.P.* An algorithm for graceful labelings of certain unicyclic graphs // VNU Journal of Science: Comp. Science & Com. Eng. – 2014. – Vol. 30, N 3. – P. 1 – 11.

Одержано 15.12.2014