УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК, Г.А. ШУЛИНОК

О ПАРОСОЧЕТАНИЯХ В ЧИСЛОВЫХ ГРАФАХ

Рассматриваются натуральные арифметические и натуральные модульные графы. Доказываются свойства графов, содержащих паросочетания всех вершин. Предлагаются методы, позволяющие для произвольного натурального арифметического и натурального модульного графа определить наличие совершенного паросочетания.

Введение. Известно [1], что числовые графы обладают рядом полезных свойств, в том числе и алгоритмической эффективностью. Уже найдены эффективные алгоритмы проверки изоморфизма и нахождения хроматического числа, а также алгоритмы поиска в глубину и ширину на числовых графах. Цель данного исследования найти способ поиска паросочетаний, охватывающих наибольшее число вершин числового графа.

Определение 1. Числовым графом $G(X, U, F, g)$ называется такой граф, в котором вершины содержатся в множестве X, и пары вершин $x, y \in X$ соединены дугами тогда и только тогда, когда $F(x, y) \in U$. Множество X называется множеством вершин, множество U множеством образующих, функция $F: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – порождающей функцией. Множество $X = \mathbb{N}_n$. Функция $g: X \rightarrow \{0,1\}$ называется функцией исключений.

В зависимости от вида порождающей функции и функции исключений, различают натуральные числовые графы ($g(x) = 1$, $\forall x \in X$), а также арифметические ($F(x,y) = x + y$, A-графы) и модульные ($F(x, y) = |x - y|$, M-графы) графы. Назовем такие натуральные графы соответственно HA-графами и HM-графами.

Определение 2. Паросочетание ребер числового графа G – это набор ребер вида (x_i, x_j), $x_i, x_j \in X$, в котором вершины присутствуют лишь однажды, и $F(x_i, x_j) \in U$, т. е. соединяются ребром.

Рассмотрим случай с HA-графами, поскольку эти графы исследуются уже достаточно давно, и за это время их структура достаточно изучена.

Пусть NA_n (u) – натуральный арифметический граф с n вершинами и одной образующей u. Исходя из свойств $НА$-графов вытекает, что образующая $u = n + 1$ сообщает графу $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ребер вида $(k, 1 + n - k)$, $k = 1, 2, ..., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Очевидно, эти ребра несвязны, т. е. являются паросочетанием. При четном числе вершин весь граф представляет собой совершенное паросочетание (рис. 1). При нечетном n такая образующая будет давать максимальное паросочетание. Сформулируем этот результат в виде леммы.

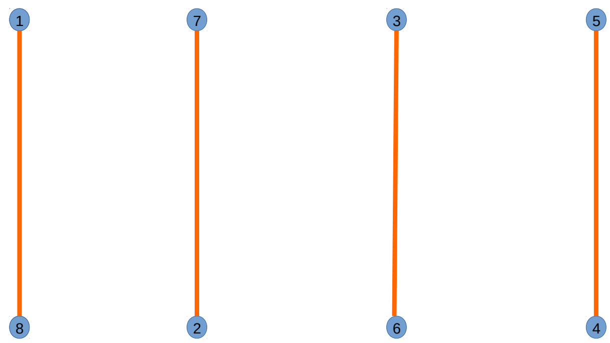


РИС. 1. Паросочетание графа $NA_8(9)$

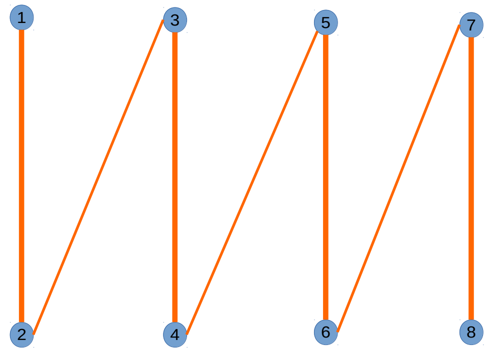
Лемма 1. $НА$-граф с одной образующей $u = n + 1$ – это максимальное паросочетание для заданного числа вершин n.

Несложно заметить, что произвольный $НА$-граф, содержащий образующую $u = n + 1$ и имеющий четное число вершин будет содержать совершенное паросочетание. Для натуральных модульных графов с одной образующей существует более одного варианта образующих, которые сообщают максимальное паросочетание. Вариант образующей $u = 1$ показан на рис. 2. Как известно [1], эта образующая сообщает графу гамильтонову цепь. Выбрав чередующиеся ребра цепи можно получить максимальное паросочетание для заданного n.

Лемма 2. В $НМ$-графе с образующей $u = 1$ максимальное паросочетание имеет вид: (1, 2) (3, 4), ..., $(2k - 1, 2k)$, где $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Известно [1], что $НМ$-граф с одной образующей представляет собой набор цепей $(u > 1)$. Особый интерес для нас представляет случай, когда $u \mid n$ и $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2u)$. В этом случае количество цепей соответствует u, но каждая из цепей состоит из $\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor$ вершин. Цепь нечетной длины (содержащая четное количество вершин) будет содержать полное паросочетание. Условие $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2u)$ или $\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ обеспечивает это. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *НМ*-граф $NM_n(u)$ такой, что $u \mid n$ и $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2u)$ содержит совершенное паросочетание.



(1, 2) (3, 4) (5, 6) (7, 8)

РИС. 2. Паросочетание полученное из гамильтоновой цепи на примере $NM_8(1)$

Очевидно, что граф, содержащий образующие, соответствующие условиям лемм 2 и 3 будет вмещать в себе совершенное паросочетание при четном числе вершин. Вычислить это паросочетание достаточно просто: каждая цепь начинается с вершины $x = 1,2,\ldots, u$, а дальше берется ребро за ребром (рис. 3).

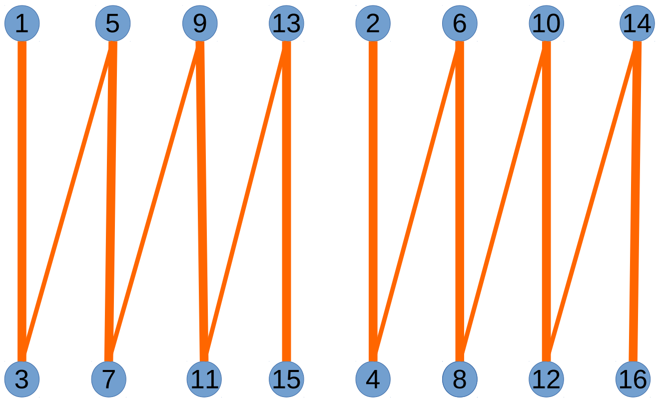


РИС. 3. Граф NM_{16} (2) и паросочетание в составляющих цепях

Также среди *НМ*-графов с одной образующей можно найти граф, изоморфный NA_n $(n + 1)$.

Лемма 4. *НМ*-граф $NM_n\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ изоморфен графу $NA_n(n + 1)$.

Доказательство. Сопоставим вершинам графа $NA_n(n + 1)$ вершины графа $NM_n\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ следующим образом: вершина $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leftrightarrow \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, $k \leftrightarrow k$, $k = 1,2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,

$n - k + 1 \leftrightarrow k + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Охвачены все вершины. Сопоставление взаимно однозначное. Связность сохраняется. Графы изоморфны. Лемма доказана.

Следствие. *НМ*-граф $NM_n\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ дает максимальное паросочетание для заданного n.

Для начала рассмотрим натуральные арифметические графы с двумя образующими. Выберем граф $NA_n(u_1, u_2)$ такой, чтобы $3 \le u_1 \le u_2$ и $u_2 = n + u_1$. При этом образующая $u_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$. В этом графе образующая u_1 сообщает графу ребра $(1, u_1 - 1)$, $(2, u_1 - 2)$, …, $\left(\left\lfloor \frac{u_1}{2} \right\rfloor, u_1 - \left\lfloor \frac{u_1}{2} \right\rfloor\right)$. Образующая u_2 при условии четности числа вершин тоже нечетна, а следовательно сообщает графу ребра (u_1, n), $(u_1 + 1, n - 1)$, …, $(u_1 + \left\lfloor \frac{u_1}{2} \right\rfloor - 1, u_1 + \left\lfloor \frac{u_1}{2} \right\rfloor)$. При четном n таких ребер будет $\frac{n}{2}$, т. е. это будет совершенным паросочетанием. Тем самым лемма доказана.

Лемма 5. Граф $NA_n(u_1, u_2)$, такой, что $3 \le u_1 \le u_2$ и $u_2 = n + u_1$ и образующая $u_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ будет изоморфна графу $NA_n(n + 1)$.

Среди натуральных модульных графов с двумя образующими легко обнаружить графы, изоморфные гамильтоновой цепи или графу $NM_n(1)$. В таких графах пара образующих будет иметь вид $u_1 \le u_2$, $u_1, u_2 \in U$, $u_1 + u_2 = n + 1$. Пример такого графа показано на рис. 4.

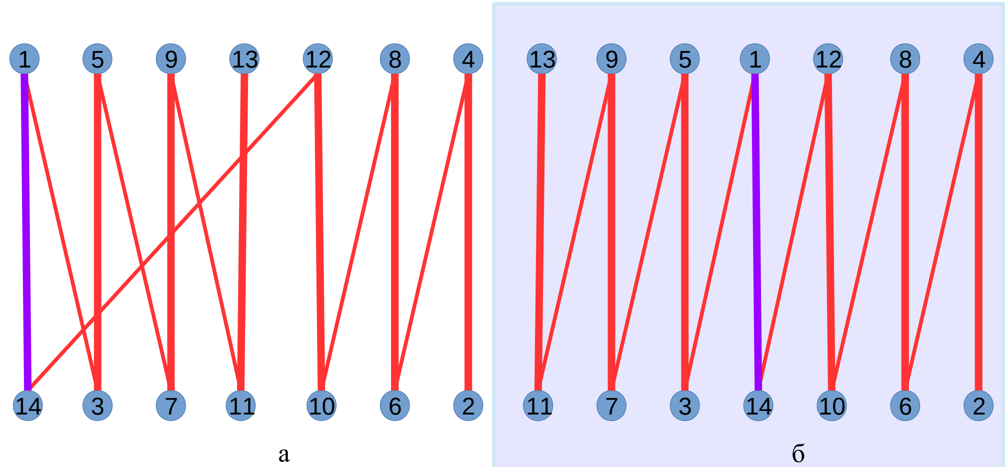


РИС. 4. Граф $NM_{14}(2,13)$ с двумя образующими, изоморфный гамильтоновой цепи $NM_{14}(1)$

Как видно, этот граф изоморфен $NM_{14}(1)$, а по лемме 2 получается, что в нем есть паросочетание из 7 ребер: (1, 14), (2, 4), (3, 5), (6, 8), (7, 9), (10,12) и (11, 13), которые представляют собой ребра цепи взятые от начала и до конца (рис. 3, б). Общий результат можно задать формально.

Лемма 6. Граф $NM_n(u_1, u_2)$ с образующими вида $u_1 + u_2 = n+1$, $n \equiv 0 \pmod 2$, НОД(u_1,u_2) = 1, содержит совершенное паросочетание из $\frac{n}{2}$ ребер.

Интерес для нас представляют *НМ*-графы с нечетными образующими. В работе [1] показано, что такие графы будут двудольными. *НМ*-граф с единственной нечетной образующей будет несвязным (при $u > 1$), однако можно сказать
о существовании совершенного паросочетания при условии, что $u \mid n$ и $\frac{n}{u} \equiv 0 \pmod 2$, т. е. при выполнении условия леммы 3. В случае, когда образующих больше одной, получается связный (если образующие взаимно простые) двудольный граф или же граф распадается на связные компоненты (если у образующих есть НОД).

Пусть $NM_n(u_1, u_2)$, $u_1 \equiv 1 \pmod 2$, $u_2 \equiv 1 \pmod 2$. Этот граф будет двудольным, каждая из долей будет содержать четные и нечетные вершины соответственно. Пусть $n \equiv 0 \pmod 2$. В этом случае обе доли будут иметь одинаковый размер. По теореме Холла о паросочетаниях [2] такой граф будет содержать совершенное паросочетание, если вершины с кодами от 2 до $u_1 - 1$, а также вершины с кодами от $n - u_1$, $n - u_1 + 2, \ldots, n$ должны быть связаны по крайней мере с u_1 нечетными вершинами.

Рассмотрим двудольный *НМ*-граф с нечетными образующими. В терминах теоремы Холла, пусть $A = \{1, 3, \ldots, u_1, n - u_1 + 2, n - u_1 + 4, \ldots, n - 1\}$. Тогда $NA = \{1 + u_1, 1 + u_2, \ldots, 1 + u_m, \ldots, u_m + n - 1\}$. По теореме Холла граф $NM_n(1 < u_1, u_2, \ldots, u_m \le n - 1)$, $u_i \equiv 1 \pmod 2$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $n = 2k$, будет содержать совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда произвольное подмножество нечетных вершин будет связано с подмножеством четных вершин той же или большей мощности. Однако в случае *НМ*-графа можно сократить количество подмножеств для анализа. Легко показать, что в случае, когда вершины в подмножестве A соответствуют свойству

$$\left|a_i - a_j\right| = 2u_k, \quad a_i, a_j \in A,\ k = 1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

подмножество связных четных вершин будет иметь меньшую мощность. Также, интерес представляют другие нечетные вершины, которые соответствуют свойству (1).

Этот результат формально можно изложить в виде теоремы Холла для натуральных модульных графов.

Теорема 1. Числовой граф $NM_n(1 < u_1, u_2, \ldots, u_m \le n - 1)$, $u_i \equiv 1 \pmod 2$, $i = 1,2, \ldots, m$, $n = 2k$ будет иметь совершенное паросочетание, если подмножество связных вершин для подмножества нечетных вершин $A = \{1,3,\ldots, u_1, n-u_1, n - u_1 + 2, n - u_1 + 4,\ldots, n - 1\}$ будет иметь мощность не меньшую $|A|$.

В случае натуральных арифметических графов прослеживается другое свойство. Рассмотрим полный двудольный *НА*-граф с четным числом вершин

$NA_n(3, 5, 7,\ldots, n - 1, n + 1,\ldots, 2n - 1)$, $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. Очевидно, что граф будет двудольным. Одна из долей будет состоять только из четных вершин, а другая – из нечетных. По теореме Холла, чтобы в таком графе существовало совершенное паросочетание, необходимо и достаточно, чтобы любое подмножество нечетных вершин было бы связано с не меньшим подмножеством четных. Исходя из лемм 1 и 5, полный двудольный граф распадается на набор из $\frac{n}{2}$ паросочетаний. Кроме паросочетания, получаемого по лемме 1, будут паросочетания, полученные с помощью пар образующих $(u, n + u)$. При этом, используя дополнительные образующие, можно получить более общий результат. Таким образом, можно сформулировать теорему Холла для *НА*-графов.

Теорема 2. Двудольный граф NA_n $(u_1, u_2,\ldots,u_m)$ содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда цепи, содержащие вершину 1 и вершину n содержат совершенное паросочетание.

Следствие. *НА*-граф $NA_n(u_1, u_2)$ с двумя нечетными образующими содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $n|(u_2 - u_1)$, $u_1 < u_2$.

Заключение. Данная работа положила начало исследованию паросочетаний на числовых графах. Определено, что в условиях, применимых к теореме Холла (двудольные графы) для *НМ*-графов и *НА*-графов можно получить исчерпывающий ответ для графов с нечетными образующими.

І.Е. Шулінок, Г.О. Шулінок

ПРО ПАРОУЗГОДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ ГРАФІВ

Розглядаються натуральні арифметичні й натуральні модульні графи. Доводяться властивості графів, що містять узгодження всіх вершин. Пропонуються методи, які дозволяють для довільного натурального арифметичного і натурального модульного графа визначити наявність досконалого узгодження вершин.

I.E. Shulinok, G.A. Shulinok

ABOUT NUMERIC GRAPHS NODES MATCHING

Natural arithmetic and natural modular graphs are considered. The graphs qualities for perfect matching are solved. The methods to allow determine a perfect matching for any natural arithmetic and natural modular graph are proposed.

1. *Донец Г.А.* Основы теории числовых графов. – Кировоград: ЧП «Эксклюзив-Систем», 2013. – 280 с.
2. *Зыков А.А.* Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.

Получено 11.02.2015