УДК 519.17

З.А. ШЕРМАН

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНЫМ РАЗМЕТКАМ ГРАФОВ

Рассмотрены методы построения Фибоначчи грациозных разметок цепного соединения циклов; одноточечного соединения циклов, а также произвольного цепного соединения циклов.

Введение. Изучение грациозных разметок и методов их построения предложены Роса в 1967 году. Грациозные разметки нашли теоретическое применение в теории графов и других разделах дискретной математики. Кроме этого они часто служат моделями при создании макетов антенн в радиоастрономии, проектировании коммуникационных сетей, кодировании радарных импульсов при наведении ракет. Фибоначчи грациозная разметка, являющаяся разновидностью грациозных разметок, впервые рассмотрена в 1978 году [1]. Основная цель работы – описать новые классы конечных Фибоначчи грациозных графов, содержащих циклические конструкции.

Под графом будем понимать конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называют порядком, а число $|E(G)|$ ребер – его размером. Если не указана мощность множеств V и E, то будем считать $|V(G)| = p$, $|E(G)| = q$.

Определение [1]. Функцию f называют Фибоначчи грациозной разметкой графа G с q ребрами, если f – инъекция из $V(G)$ в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$ где F_q – это q-ое число Фибоначчи в последовательности, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, …, $F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$ и, индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v) = |f(u) - f(v)|$, является биекцией из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$.

Граф, допускающий Фибоначчи грациозную разметку, называется Фибоначчи грациозным графом.

Исследуем на Фибоначчи грациозность такие типы графов: $G = < C_m:P_k : C_n >$ – цепное соединение циклов; одноточечное соединение циклов [2].

Теорема 1. Граф $G = < C_{3m+2} : P_k:C_{3n} >$ допускает Фибоначчи грациозную разметку для любых натуральных чисел k, m, n.

Доказательство. Обозначим $V(C_{3m+2}) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{3m+1}\}$, $V(C_{3n}) =$ $= \{u_0, u_1,$ u_0 концевые вершины цепи P_k и $V(P_k) = \{w_0 = v_0, w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} = u_0\}$ – множество вершин цепи P_k. Предположим, что граф $G = < C_{3m+2} : P_k : C_{3n} >$ допускает Фибоначчи грациозную разметку $f: V \to \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$, где $|E(G)| = q = 3(m + n) + k + 1$. Зададим функцию f таким образом:

$$f(v_0) = 0,$$

$$f(v_i) = \begin{cases} F_i, & \text{если } i \equiv 0(mod\ 3), \\ F_{i+1}, & \text{если } i \equiv 1(mod\ 3), \\ F_{i+2}, & \text{если } i \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

для $i = 1, 2, \ldots, 3m+1$,

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} F_{q-(j-1)},$$

для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и

$$f(u_i) = \begin{cases} f(w_{k-1}) + F_{3m+2+i}, & \text{если } i = 1(mod\ 3), \\ f(w_{k-1}) + F_{3m+2+(i+1)}, & \text{если } i = 2(mod\ 3), \\ f(w_{k-1}) + F_{3m+2+(i+2)}, & \text{если } i = 0(mod\ 3), \end{cases}$$

для $i = 1, 2, \ldots, 3n-1$.

Функция f задает отображение, ставящее каждой вершине в соответствие число из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$, и разным вершинам соответствуют разные числа. Таким образом, f – инъективное отображение, порождающее реберную разметку f^*:

$$f^*(v_1, v_0) = |f(v_1) - f(v_0)| = |F_1 - 0| = F_1,$$

$$f^*(v_2, v_1) = |f(v_2) - f(v_1)| = |F_4 - F_1| = F_3,$$

……………………………………………..

$$f^*(v_{3m+1}, v_0) = |f(v_{3m+1}) - f(v_0)| = |F_{3m+1} - 0| = F_{3m+1},$$

$$f^*(w_0, w_1) = |f(v_0) - f(w_1)| = |0 - F_q| = F_{3(m+n)+k+1},$$

$$f^*(w_1, w_2) = |f(w_1) - f(w_2)| = |F_q + F_q - F_{q-1}| = F_{3(m+n)+k},$$

……………………………………………...

$$f^*(w_{k-2}, w_{k-1}) = |f(w_{k-2}) - (w_{k-1})| =$$

$$= |\sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{j-1} F_{q-(j-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} F_{q-(j-1)}| = F_{3(m+n)+3},$$

$$f^*(u_0, u_1) = |f(u_0) - f(u_1)| = |f(w_{k-1}) - (f(w_{k-1}) + F_{3m+3})| = F_{3m+3},$$

………………………………………………………………………………………..

$$f^*(u_{3m-1}, u_0) = |f(u_{3m-1}) - f(w_{k-1})| = |f(w_{k-1}) + F_{3m+2+3n} - f(w_{k-1})| = F_{3(m+n)+2}.$$

Таким образом, индуцируемая реберная разметка f^*, представляет собой биекцию из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$. Согласно определения, разметка f – Фибоначчи грациозная для графа G. Теорема доказана.

Теорема 2. Одноточечное соединение конечного числа циклов C_{3m_i}, где $i =$ $= 1, 2, ..., k$ – Фибоначчи грациозный граф для любых натуральных чисел k, m_i.

Доказательство. Рассмотрим граф G, представляющий собой, одноточечное соединение циклов C_{3m_i}, где $i = 1, 2, ..., k$ [3]. Пусть копии всех циклов в графе G имеют общую вершину v_0^1. Обозначим $V(C_{3m_i}) = \{v_0^i, v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{3m-1}^i\}$ – множество вершин цикла C_{3m_i}, где $i = 1, 2, ..., k$. Предположим, что граф G допускает Фибоначчи грациозную разметку $f: V \to \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$, где $|E(G)| = q = 3(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$. Зададим функцию f следующим образом:

$$f(v_0^i) = 0,$$

для $i = 1, 2, ..., k$,

$$f(v_j^1) = \begin{cases} F_j, & \text{если } j \equiv 1(mod\ 3), \\ F_{j+1}, & \text{если } j \equiv 2(mod\ 3), \\ F_{j+2}, & \text{если } j \equiv 0(mod\ 3), \end{cases}$$

для $j = 1, 2, \ldots, 3m–1$ и

$$f(v_j^i) = \begin{cases} F_{t+j}, & \text{если } j \equiv 1(mod\ 3), \\ F_{t+j+1}, & \text{если } j \equiv 2(mod\ 3), \\ F_{t+j+2}, & \text{если } j \equiv 0(mod\ 3), \end{cases}$$

для $i = 2, 3, ..., k$, и для $j = 1, 2, \ldots, 3m – 1$, $t = \sum_{s=1}^{i-1} 3m_s$.

Функция f задает инъективное отображение из множества вершин в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$. При этом ребрам копии C_{3m_1} будут поставлены в соответствие числа:

$$f^*(v_0^1, v_1^1) = |f(v_0^1) - f(v_1^1)| = |0 - F_1| = F_1,$$

$$f^*(v_1^1, v_2^1) = |f(v_1^1) - f(v_2^1)| = |F_1 - F_3| = F_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^*(v_{3m-2}^1, v_{3m-1}^1) = |f(v_{3m-2}^1) - f(v_{3m-1}^1)| = |F_{3m-2} - F_{3m}| = F_{3m-1},$$

$$f^*(v_0^1, v_{3m-1}^1) = |f(v_0^1) - f(v_{3m-1}^1)| = 0 - F_{3m}| = F_{3m}.$$

В графе G для каждой копии C_{3m_i}, где $i = 2, 3, ..., k$, отображение индуцирует следующую разметку ребер f^*:

$$f^*(v_0^i, v_1^i) = |f(v_0^i) - f(v_1^i)| = |0 - F_{t+1}| = F_{t+1},$$

$$f^*(v_1^i, v_2^i) = |f(v_1^i) - f(v_2^i)| = |\, F_{t+1} - F_{t+3} \,| = F_{t+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^*(v_{3m-2}^i, v_{3m-1}^i) = |f(v_{3m-2}^i) - f(v_{3m-1}^i)| = |\, F_{t+3m-2} - F_{t+3m} \,| = F_{t+3m-1},$$

$$f^*(v_0^i, v_{3m-1}^i) = |f(v_0^i) - f(v_{3m-1}^i)| = |\, 0 - F_{t+3m} \,| = F_{t+3m}.$$

Реберная разметка порожденная функцией f^*, представляет собой биекцию из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, F_3,\ldots, F_q\}$. Согласно определения, разметка f – Фибоначчи грациозная для графа G. Теорема доказана.

Следствие. Одноточечное соединение произвольного числа циклов C_{3m_i}, где $m_1 \equiv 2(mod 3)$ и $m_i \equiv 0(mod 3)$ для i = 2, 3, ..., k является Фибоначчи грациозным графом для любых натуральных чисел k, m_i.

Доказательство. Обозначим $V(C_{m_1}) = \{v_0^1,\ v_1^1,\ v_2^1,\ \ldots,\ v_{m_1-1}^1\}$ – множество вершин цикла C_{m_1}, $V(C_{m_i}) = \{u_0^1 = v_0^1, u_1^i, u_2^i, \ldots, u_{3m-1}^i\}$ – множество вершин цикла C_{m_i}, где i = 2, ..., k. Проведем рассуждения аналогичные тем, что представлены в доказательстве теоремы 2. Пусть граф G допускает Фибоначчи грациозную разметку $f: V \to \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$, где $|E(G)| = q = 3(m_1 + m_2 + \ldots$ $\ldots + m_k) + 2$. Зададим f следующим образом:

$$f(v_0^1) = f(u_0^i) = 0,$$

для i = 2, ..., k,

$$f(v_j^1) = \begin{cases} F_j, & j \equiv 0(mod\ 3), \\ F_{j+1}, & j \equiv 1(mod\ 3), \\ F_{j+2}, & j \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

для j = 1, 2, …, $m_1 - 1$,

$$f(v_j^i) = \begin{cases} F_{t+j}, & j \equiv 1(mod\ 3), \\ F_{t+j+1}, & j \equiv 2(mod\ 3), \\ F_{t+j+2}, & j \equiv 0(mod\ 3), \end{cases}$$

для j = 1,2, …, $m_i - 1$ и для i = 2, 3, …, k, $t = \sum_{s=1}^{i-1} 3m_s$.

Метки ребер, индуцируемые разметкой f, образуют множество:

$$f^*(v_0^1, v_1^1) = |\, 0 - F_2 \,| = F_2 = F_1,$$

$$f^*(v_1^1, v_2^1) = |\, F_1 - F_4 \,| = F_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^*(v_{m_1-2}^1, v_{m_1-1}^1) = |\, F_{m_1-2} - F_{m_1} \,| = F_{m_1-1},$$

$$f^*(v_0^1, v_{m_1-1}^1) = |\, 0 - F_{m_1} \,| = F_{m_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^*(v^i_{3m-2}, v^i_{3m-1}) = |f(v^i_{3m-2}) - f(v^i_{3m-1})| = |F_{t+3m-2} - F_{t+3m}| = F_{t+3m-1},$$

$$f^*(v^i_0, v^i_{3m-1}) = |f(v^i_0) - f(v^i_{3m-1})| = |0 - F_{t+3m}| = F_{t+3m},$$

для $i = 2, 3, \ldots, k$.

Отображение f^* представляет собой биекцию из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$. Согласно определения, разметка f – Фибоначчи грациозная для графа G. Следствие доказано.

Теорема 3. Произвольное цепное соединение графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($k \geq 2$) из семейства графов $G_1 = C_{3m+2}$, $G_i = C^i_{3n_i}$, где $i = 1, 2, 3, ..., k$, $C^i_{3n_i}$ – цикл порядка $|V(G_i)| = 3n_i$, является Фибоначчи грациозным графом для любых натуральных чисел m, n_i, k.

Доказательство. Пусть граф G образуется соединением графов $G_1 = C_{3m+2}$ и $G_i = C^i_{3n_i}$, $i = 1, 2, 3, ..., k$ цепью P [3]. Обозначим $V(C_{3m+2}) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{3m+1}\}$ и $V(C^i_{3n_i}) = \{u^i_0, u^i_1, u^i_2, \ldots, u^i_{3n-1}\}$, где $i = 1, 2, ..., k$ и n принимает значение, равное числу n_i. Пусть вершины графов формируют цепь $P = v_0 u^1_0 u^2_0 \ldots u^k_0$. $V(P_k) = \{v_0, u^1_0, u^2_0, \ldots, u^k_0\}$ – множество вершин цепи P_k.

Зададим вершинную разметку f графа G размера $|E(G)| = q =$ $= 3(m + n_1 + n_2 + \ldots + n_k) + k + 1$ следующим образом:

$$f(v_0)=0,$$

$$f(v_i) = \begin{cases} F_{i+2}, \text{ если } i \equiv 2(mod\ 3), \\ F_i, \text{ если } i \equiv 0(mod\ 3), \\ F_{i+1}, \text{ если } i \equiv 1(mod\ 3), \end{cases}$$

для $i = 1, 2, \ldots, 3m + 1$,

$$f(u^i_0) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} F_{q-(j-1)}$$

для $i = 1, 2, 3, ..., k, j = 1, 2, \ldots, 3n - 1$,

$$f(u^i_j) = \begin{cases} f(u^i_0) + F_{3m+2+j}, \text{ если } i \equiv 2(mod\ 3), \\ f(u^i_0) + F_{3m+2+(j+1)}, \text{ если } i \equiv 0(mod\ 3), \\ f(u^i_0) + F_{3m+2+(j+2)}, \text{ если } i \equiv 1(mod\ 3), \end{cases}$$

для $i = 1, 2, 3, ..., k, j = 1, 2, \ldots, 3n - 1$.

Таким образом, функция f задает инъективное отображение из множества вершин в множество чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$. Индуцируемая реберная разметка f представляет собой биекцию из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$. Согласно определения, разметка f – Фибоначчи грациозная для графа G. Теорема доказана.

Заключение. В данной работе расширили класс Фибоначчи грациозных графов. Разработанные методы построения Фибоначчи грациозной разметки цепного соединения циклов, одноточечного соединения циклов, произвольного цепного соединения циклов могут быть использованы в дальнейших теоретических исследованиях.

З.О. Шерман

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ПО ФІБОНАЧЧІ ГРАЦІОЗНИМ РОЗМІТКАМ ГРАФІВ

Розглянуті методи побудови Фібоначчі граціозної розмітки ланцюгового з'єднання циклів; одноточкового з'єднання циклів, а також довільного ланцюгового з'єднання циклів.

Z.O. Sherman

SOME RESULTS FIBONACCHI GRACEFUL LABELINGS OF GRAPHS

In this paper some methods for constructing Fibonacci graceful mark-connection chain cycles; one-point connection cycles and arbitrary chain connection cycles.

1. *Bange D.W., Barkauskas A.E.* Fibonacci graceful graphs // Fibonacci quarterly. – 1983. – Vol. 21. – P. 174 – 188.
2. *Шерман З.А*. Фибоначчи грациозная разметка графов, содержащих в качестве подграфов циклы // Материалы XV Международной научной конференции им. академика М. Кравчука. – Киев, 2014. – № 2. – С. 208 – 209.
3. *Vaidya S.K., Prajapati U.M.* Fibonacci and super Fibonacci graceful labeling of some cycle related graphs // International J. Math. Combin. – 2011. – Vol. 4. – P. 56 – 69.

Получено 14.01.2015