УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

УСЛОВИЕ ТОЧНОСТИ ДВОЙСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОЦЕНОК В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Получено в матричном виде необходимое и достаточное условие точности двойственной лагранжевой оценки для общего случая квадратичной экстремальной задачи.

Рассмотрим общую постановку квадратичной экстремальной задачи:

$$f^* = \min_{x \in T} f_0(x)\,, \qquad (1)$$

где $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LE}; f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}\}$, $x \in R^n$; целевая функция и все функции ограничений задачи представляют собой квадратичные формы

$$f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i,\ i \in \{0\} \cup I^{LE} \cup I^{EQ}\,,$$

с симметричной $n \times n$-матрицей A_i, вектором $b_i \in R^n$ и константой $c_i \in R^1$. Двойственная лагранжева оценка ψ^* [1, 2] оптимального значения f^* целевой функции задачи (1) определяется как

$$\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \le f^*, \qquad (2)$$

где

$$\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(u, x), \qquad (3)$$

$L(u, x) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функция Лагранжа задачи (1), U^+ – область определения вектора множителей Лагранжа $u \in R^m$, $m = |I^{LE}| + |I^{EQ}|$, учитывающая наличие ограничений в виде неравенств ($U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LE}\}$); $D = \{u : A(u) \succ 0\}$ – область положительной определенности матрицы $A(u)$. Для общего случая квадратичной экстремальной задачи (1) условие, при котором двойственная оценка ψ^* (2) – (3) совпадает с оптимальным значением f^* целевой функции задачи (1), в [3] сформулировано в виде такой теоремы.

Теорема 1 [3, теорема 4]. Для того, чтобы двойственная лагранжева оценка ψ^* (2) – (3) для квадратичной задачи (1) была точной, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор множителей Лагранжа u^*, при котором функция $L(u^*,x)-f^*$ была представима в виде суммы квадратов линейных форм:

$$\exists u^* : L(u^*,x)-f^* = \sum_{j=1}^{k} l_i^2(x), \quad k \le n. \tag{4}$$

Там же в [3] дана следующая геометрическая интерпретация двойственного подхода [1, 2], и теоремы 1, в частности. Каждому $\bar{u} \in D \cap U^+$ соответствует квадратичная функция

$$L(\bar{u},x) = x^T A(\bar{u})x + b^T(\bar{u})x + c(\bar{u}) = \sum_{j=1}^{k} l_j^2(\bar{u},x) + \psi(\bar{u}),$$

в которой $l_j(x)$, $j=\overline{1,k}$, $k \le n$ – линейные функции, равные нулю в ее точке минимума $\bar{x}$, а $\psi(\bar{u}) = L(\bar{u},\bar{x})$ – ее минимальное значение. Следует отметить, что подобное разложение может быть неоднозначно, например, для выпуклой задачи $f^* = f(x_1^*,x_2^*) = f(0,0) = \min\left\{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2 : x_1+x_2=0\right\}$ функцию Лагранжа $L(u,x) = x_1^2+x_2^2+x_1+x_2+u(x_1+x_2)$ при $u^*=-1$ можно представить такими двумя способами: $L(u^*,x) = x^2+y^2 = 0.5(x-y)^2+0.5(x+y)^2$. Наиболее общим можно считать разложение вида

$$L(\bar{u},x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\bar{u})(\xi_i(\bar{u}),\ x-x(\bar{u}))^2 + \psi(\bar{u}),$$

где $\lambda_i(\bar{u})$ – собственные числа, а $\xi_i(\bar{u})$ – собственные вектора матрицы $A(\bar{u})$.

Минимальные значения всех функций из образованного семейства $\left\{L(\bar{u},x)\right\}_{\bar{u}\in D\cap U^+}$ ограниченных снизу квадратичных функций не превышают f^* исходной задачи (1), и на допустимой области задачи (1)

$$\forall \bar{u} \in D \cap U^+ \quad \forall x \in T \quad L(\bar{u},x) \le f_0(x).$$

Тогда теорему 1 можно интерпретировать следующим образом: оценка точна тогда и только тогда, когда среди функций из данного семейства найдется хотя бы одна функция $L(u^*,x)$, минимум которой равен f^*. Легко показать, что такая «точная аппроксимирующая снизу» функция обязательно проходит через точку x^* глобального минимума исходной задачи.

Утверждение 1. Если $\psi^* = \psi(u^*) = f^*$, то $x^* \in X(u^*) = \arg\min_x L(u^*,x)$.

Доказательство. Допустим противное: пусть $x^* \notin X(u^*) = \arg\min_x L(u^*,x)$, т. е.

$$L(u^*,x^*) > \psi(u^*) = L(u^*,x(u^*)) = f^*.$$

Но для функции Лагранжа $\forall u \in U^+ \ \ \forall x \in T \ \ L(u,x) \le f_0(x)$, т. е.

$$L(u^*,x^*) \le f(x^*) = f^* \text{ (т.к. } u^* \in U^+,\ x^* \in T\text{)}.$$

Получили противоречие, которое доказывает справедливость утверждения.

Сформулированное утверждение 1 означает, что когда двойственная оценка точная и достигается при некотором векторе двойственных переменных u^*, то множество точек глобального минимума задачи (1) принадлежит множеству решений внутренней задачи: $x^* \in X(u^*)$. Отметим, что поскольку вектор u^* также может определятся неоднозначно, то множество точек глобального минимума задачи (1) принадлежит каждому из множеств решений $X(u^*)$.

Далее предлагается формулировка условия точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач, в матричном представлении.

Теорема 2. Для того, чтобы двойственная оценка ψ^* (2) – (3) для квадратичной задачи (1) была точной, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -f^* \end{pmatrix}$ была представима в виде разности неотрицательно-определенной матрицы и линейной комбинации матриц $\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,m}$, коэффициентами которой являются координаты вектора $u^* \in U^+$.

Доказательство. Преобразуем задачу (1) к однородному виду:

$$f^* = \min_{(x,y)\in M \subset \Re^{n+1}} (x^T A_0 x + b_0^T xy), \tag{5}$$

где множество M задается ограничениями

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i y^2 \le 0,\ \ i \in I^{LQ}, \tag{6}$$

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i y^2 = 0,\ \ i \in I^{EQ}, \tag{7}$$

$$y^2 - 1 = 0. \tag{8}$$

Для двойственных оценок справедливо следующее свойство.

Утверждение 2 [4, утверждение 1]. Двойственные оценки для эквивалентных квадратичных задач

$$f^* = \inf_{x\in R^n\}} (x^T A_0 x + b_0^T x),$$

$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i \le 0,\ \ i \in I^{LE},$$

$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i = 0,\ \ i \in I^{EQ},$$

и

$$f^* = \inf_{x\in R^n; y \in R^1} (x^T A_0 x + b_0^T xy),$$

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i \le 0, \ \ i \in I^{LE},$$

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i = 0, \ \ i \in I^{EQ},$$

$$y^2 = 1$$

совпадают.

Вторая задача построена из первой с помощью дополнительной переменной $y \in R^1$ путем домножения на нее линейных членов всех квадратичных форм. При этом оптимальное значение f^* не меняется, а множество решений увеличивается вдвое: если x^* является решением первой задачи, то решением второй будут $(x^*, 1)$ и $(-x^*, -1)$, и наоборот.

Из утверждения 2 следует, что при переходе от рассмотрения задачи (1) к рассмотрению задачи (5) – (8) значение двойственной лагранжевой оценки остается неизменной.

Выпишем функцию Лагранжа для задачи (5) – (8)

$$L(x, y, u, v) = x^T A_0 x + b_0{}^T xy + \sum_{i=1}^{m} u_i (x^T A_i x + b_i^T xy + c_i\, y^2) + v(y^2 - 1),$$

где $u_i \ge 0, \ \ i \in I^{LQ}$. Для нее условие (4) теоремы 1 о точности двойственной лагранжевой оценки примет следующий вид: существуют u^* и v^*, такие, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \sum_{i=1}^{m} u_i^* \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v^* - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x, y).$$

Другими словами, оценка является точной тогда и только тогда, когда для некоторого v^*, во-первых, матрица $A_v(v^*) = \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & v^* \end{pmatrix}$ представима в виде разности неотрицательно определенной матрицы (соответствует сумме квадратов правой части равенства) и линейной комбинации $A_u(u^*) = \sum_{i=1}^{m} u_i^* \overline{A}_i$ (при условии $u_i \ge 0$, $i \in I^{LQ}$) матриц $\overline{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, и, во-вторых, $v^* + f^* = 0$. Что и требовалось доказать.

Фактически, условие теоремы 2 соответствует условию неотрицательной определенности матрицы $A(u, v) = A_v(v) + A_u(u)$ функции Лагранжа задачи (5) – (8) в точке $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$, где $v^* = -f^*$. Учитывая это можно вспомнить работу [5], где для нахождения нижней оценки минимального значения квадратичной функции на многогранном конусе применялась двойственная оценка с использованием функционально избыточных ограничений, полученных путем попарного перемножения исходных линейных ограничений. Доказательство необходимого и достаточного условия [5, теорема 1], когда такой подход дает точное значение глобального минимума данной задачи, базировалось на тех же принципах, что и доказательство теоремы 2.

О.А. Березовський

УМОВА ТОЧНОСТІ ДВОЇСТИХ КВАДРАТИЧНИХ ОЦІНОК У МАТРИЧНОМУ ВИГЛЯДІ

Отримано в матричному вигляді необхідну та достатню умову точності двоїстої лагранжевої оцінки для загального випадку квадратичної екстремальної задачі.

O.A. Berezovskyi

THE CONDITION OF DUAL QUADRATIC BOUNDS ACCURACY IN MATRIX FORM

The necessary and sufficient condition for the accuracy of dual Lagrange bounds for the general case of a quadratic extremal problem is obtained.

1. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
2. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Dordrecht, Kluwer, 1998. – 394 p.
3. *Березовский О.А*. О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С. 33 – 39.
4. *Березовский О.А., Стецюк П.И.* Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора // Там же. – 2008. – № 2. – С. 89 – 99.
5. *Березовский О.А., Бардадым Т.А., Лиховид Е.А.* О задаче минимизации квадратичной функции на многогранном конусе // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2012. – С. 3 – 8.

Получено 02.03.2015