УДК 519.85

Г.А. ДОНЕЦ, Л.Н. КОЛЕЧКИНА

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

Рассматривается экстремальная задача оптимизации на комбинаторных конфигурациях перестановок, описывается подход к решению таких задач на основе теории графов, учитывая свойства и структуру множества перестановок. Предлагается алгоритм решения таких задач.

Введение. Среди класса дискретных задач особое место занимают задачи, в которых требуется найти наилучший вариант, кратчайший путь, наибольшее число с заданными свойствами и т. п. Подобные задачи обладают своеобразными свойствами, а их модели являются дискретными экстремальными задачами. Дискретные экстремальные задачи – это задачи, с характерной особенностью проявляющих в том или в ином виде дискретность, присущая как алгоритмам, процессам поиска решений, так и самим получаемым решениям, а экстремальность обычно заключается в экстремальности искомых решений.

Дискретные экстремальные задачи составляют весьма значительную и все увеличивающуюся долю математических задач, которые приходится в настоящее время решать в научных и в прикладных разработках [1 – 6]. Поэтому поиск подходов и методов решения экстремальных задач на сегодняшний день есть весьма актуальным. При решении дискретных экстремальных задач обычно бывает нетрудно построить некоторые достаточно простые алгоритмы переборного характера для нахождения нужного решения. Гораздо труднее подыскать подходящие алгоритмы, использующие относительно небольшое или хотя бы просто приемлемое число элементарных операций (типа логических или арифметических при ограниченной разрядности чисел). Особое место при разработке методов для их решения занимает теория графов.

Для ряда экстремальных задач теории графов были разработаны методы их решения [1 – 4]. Рассмотрим экстремальную задачу на комбинаторной конфигурации перестановок вида, найти

$$x^* = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x),$$

для которого значения функции равно $y^* = F\left(x^*\right)$.

Так же имеет смысл рассматривать разновидность вышеуказанной задачи, где значение целевой функции находится в интервале

$$F(\overline{x}) \le F(x) \le F(\overline{\overline{x}}). \quad (1)$$

Тогда задача примет вид, определить

$$\overline{x} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \overline{y} = F(\overline{x}),$$

$$\overline{\overline{x}} = \arg\max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \overline{\overline{y}} = F(\overline{\overline{x}}) \quad (2)$$

при условии $\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \to \min$.

Для дальнейшего изложения материала рассмотрим перестановку как упорядоченную выборку элементов $a = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right)$, где $a_{i_j} \in A \ \forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, если $s \ne t \ \forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$ с некоторого мультимножества $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_q\right\}$, характеризующееся основанием $S(A) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, где $e_j \in R^1, \forall j \in N_k$ и кратностью элементов $k\left(e_j\right) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + r_2 + \ldots$ $\ldots + r_k = q$ согласно [1, 5].

Подход к решению основанный на упорядочение значений целевой линейной функции $F(x)$ и построении гамильтонова пути для точек, в которых эти значения достигаются, а затем в применении метода дихотомии к определенному гамильтоновом пути. Для этого рассмотрим граф $G(P_n)$ переставного многогранника, в котором вершинами есть множество всех перестановок P_n, а две вершины образуют дугу $\overrightarrow{p_1 p_2}$, если $f(p_1) \ge f(p_2)$, $p_1, p_2 \in P_n$ и если перестановка p_2 полученная с p_1 с помощью транспозиции двух элементов [1].

Если не существует ни одной такой перестановки, то тогда необходимо решать задачу (2), которая определена для некоторого подмножества перестановки. Задача локализации значения функции в терминах теории графов будет звучать следующим образом: для некоторой перестановки p_i известно значение линейной целевой функции; тогда для задачи (2) необходимо определить соответствующую вершину, или множество вершин графа $G(P_n)$ перестановок, в которых это значение достигается; а для задачи (2) необходимо определить множество ребер $\{(p,q)\}$ этого графа таких, что

$$f(q) < f(p_i) < f(p).$$

Каждые такие подграфы, в свою очередь, содержат слева максимальное значение функции, а справа – минимальное значение. Этот факт дает возможность сначала рассматривать только крайние значения подграфов, а при необходимости – промежуточные значения между ними. Рассмотрим определения.

Определение 1 [1]. Назовем подграфом r-ранга графа перестановочного многогранника $G(P_u)$ граф, вершины которого имеют r фиксированных старших координат.

С этой точки зрения граф $G(P_u)$ является подграфом 0-ранга многогранника $G(P_u)$ и состоит с n подграфов 1-ранга $G(P_{n-1})$, где старшая координата равна соответственно $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$. Аналогично можно классифицировать и подграфы больших рангов. Тогда, обе задачи (1), (2) можно решить, если на графе $G(P_n)$ построить множество дуг между несмежными перестановками, которые позволяют пройти по дугам путь от начальной вершины, где $f(x)$ принимает максимальное значение, до конечной, где $f(x)$ принимает минимальное значение [2].

Теорема 1 [1]. Пусть некоторый путь, соединяющий вершину x уровня m и вершину уровня s, является минимальным (максимальным). Тогда его подпуть между вершиной y уровня k и вершиной y' уровня p $(m \le k < p \le s)$ также минимальный (максимальный).

Данная теорема лежит в основе метода отыскания максимальных путей в графе без контуров и дает возможность при построении алгоритма локализации значений рассмотреть подграфы графа $G(P_n)$. Рассмотрим далее подход к решению задач (1) и (2), что позволяет выбирать только часть вершин графа и находить требуемое значение.

Определение 2 [1]. Назовем схему изображения графа перестановок $G(P)_n$, в которой каждый с n подграфов 1-ранга $G(P_{n-1})$ изображен в виде одного ребра, соединяющего две вершины с максимальным и минимальным значениями функции, структурным графом перестановок.

Под общим структурным графом понимаем граф, отражающий частичную упорядоченность элементов конфигурации по значениям целевой функции и содержит только вершины, расположенные на эквивалентных подграфах и в которых достигаются только экстремальные значения функции.

Алгоритм локализации значения линейной функции на перестановках. Начальный шаг: вводим n – количество элементов перестановки и размерность целевой функции; $c_1, c_2, \ldots, c_u$ – значения коэффициентов целевой функции $f(x)$, нормализируем целевую функцию; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – значения элементов множества перестановок, с учетом упорядочения $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$; задаем значение целевой функции $y_0 = f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $n!$.

Шаг 2. Определяем значение: $b=(n-1)!$, характеризующее количество точек в общем структурном графе в каждом подграфе.

Шаг 3. Вычисляем минимальное и максимальное значение заданной функции $f(x)$: $f(x)_{\max}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_{n-1}x_{n-1}+c_nx_n$;

$$f(x)_{\min}=c_nx_1+c_{n-1}x_2+\ldots+c_2x_{n-1}+c_1x_n.$$

Шаг 4. Строим структурный граф, имеющий n подграфов, а на каждом подграфе – начальную и конечную вершины.

Шаг 5. Определяем значение целевой функции $f(x)$ в точках – вершинах подграфов $x=\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\right)$.

Шаг 6. Определяем слева в структурном графе множество точек: $f(\bar{x}_i)\geq f\left(x^0\right)$, где x^0 точка, для которой $f\left(x^0\right)\geq y^0$, а $\bar{x}_i$, $i\in N_k$, множество точек, значение целевой функции $f(x)$ в которых больше заданного.

Шаг 7. Справа определяем множество точек: $f\left(\bar{x}_j\right)\leq f\left(x^0\right)$, где x^0 – точка, для которой выполняется условие $f\left(x^0\right)\leq y^0$; а $\bar{x}_j$, $j\in N_{n-k}$, множество точек, для которых значение целевой функции $f(x)$ меньше заданного.

Шаг 8. Определяем множество подграфов как множество сечений, элементы которого удовлетворяют условиям, согласно шага 6 и 7.

Шаг 9. Формируем множество точек – элементов перестановки, удовлетворяющие условие $f(x_0)=y_0$. Если все точки найдены, т. е. среди множества подграфов, определенных на этапе 8, нет таких, для вершин которых выполнялось бы условие $f\left(\bar{x}_j\right)\leq y_0\leq f\left(\bar{x}_j\right)$, то задача решена. Осуществляется выбор элементов точек перестановки. Иначе переход на следующий шаг.

Шаг 10. Определяем подграф, для которого выполняется условие $f\left(\bar{x}_j\right)\leq$ $\leq y_0\leq f\left(\bar{x}_j\right)$. Фиксируем последнюю координату в точке, вершине подграфа.

Шаг 11. Возлагаем $n:=n-1$. Осуществляем переход на шаг 1.

Следует отметить, что генерация точек – вершин перестановок в крайних вершинах подграфов осуществляется рекурсивным методом [1], причем с $n!$ элементов необходимо сгенерировать только $2n$ на начальном этапе. При увеличении количества условий и ограничений появляется необходимость в разработке нового подхода с помощью графов. Одним из таких подходов является алгоритм координатного метода решения экстремальных комбинаторных задач, который частично описан в [1]. Разложения на подграфы осуществляются в соответствии с выбранным типом вершин представленных в виде схемы подграфа [2], при этом заданы элементы комбинаторных конфигураций согласно возрастания или убывания. Значение функции на определенном подграфе находится между значениями в крайних вершинах структурированного графа, согласно определения 2.

Определение 3. Назовем граф – структурированной сетью, если истоком является верхняя левая вершина структурированного графа, а стоком – нижняя правая вершина этого же графа.

Сеть подграфа строим по следующим правилам (на примере конфигурации перестановок из n элементов): 1) определяем и фиксируем тип вершины; 2) фиксируем последнюю n-ю координату; 3) в верхнем ряду сетки предпоследняя $(n-1)$-я координата пробегает все возможные значения от максимального до минимального; 4) в каждом столбце сетки $(n-2)$-я координата пробегает оставшиеся возможные значения от максимального до минимального; 5) первые три координаты выстраиваются в порядке, который определяется выбранным типом вершины.

При решении задачи такие сети строятся для каждого типа вершины структурированного графа. Целесообразность их использования состоит в том, что значения функции с упорядоченными коэффициентами в узлах сети меняется от большего к меньшему в направлении слева направо и сверху вниз, что позволяет отбросить существенное количество неоптимальных точек комбинаторной конфигурации.

Определение 4. Кодом вершины в сети графа называется вектор $(j_{i_1}, j_{i_2}, j_{i_3}, ..., j_{i_n})$, координаты значений которого определяются следующим образом: $x_s = i$, $x_{s-1} = \max\{N_s \setminus x_s\}$, $x_{s-2} = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}, \ldots,$ $x_{s-n} = \max\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_n)\}$. Числа $\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, .., x_n)\}$ упорядочить по возрастанию $j_1 < j_2 < j_3 < ... < j_s$. Тогда $x_1 = j_{i_1}$, $x_2 = j_{i_2}$, $x_3 = j_{i_3}, \ldots,$ $x_n = j_{i_n}$.

Общий алгоритм координатного метода состоит в следующем:

Шаг 1. Задать начальные значения переменным: t, k, i.

Шаг 2. Зафиксировать тип вершины $v_t = (i_1, i_2, i_3)$, где $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1, 2, 3\}$. Номер подграфа i.

Шаг 3. Определить код главной вершины, которую обозначим p_1. Отметим, что значение функции-ограничения в этой вершине для заданного типа вершины и зафиксированной координаты будет максимальным для построенной сети.

Шаг 4. Вычислить значение функции в коде главной вершины $f(p_1)$.

Шаг 5. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$, $j_k > j_{k-1} > ... > j_1$. Выполнить развертывание графа в направлении координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow j_1$, приводящих к образованию еще $k-1$ кодов вершин $p_2, p_3, .., p_k$. Эти коды вершин являются кодами узлов верхней линии схемы.

Шаг 6. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты: $f(p_n) = f(p_{n-1}) - \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ – номер места числа j_λ в коде перестановки p_{n-1}.

Шаг 7. Проверить выполнение следующих условий:

a) если $f(p_m) \geq y^*$ (искомые значения могут присутствовать в построенном подграфе), то включаем m-ю перестановку в последующий поиск. Перейти к шагу 8 для последующего рассмотрения;

b) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1 \leq 1$, то перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$ – перейти к шагу 2;

c) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1=0$, то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1}. Перейти к шагу d;

d) если $t+1 \leq 6$ перейти к шагу 2, иначе завершить роботу алгоритма для данного ограничения.

Шаг 8. Увеличить k на единицу. Если $k < s$, то перейти к шагу 9, иначе перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$ – перейти к шагу 2. Если $i-1=0$, то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1} при условии, что $t+1 \leq 6$ (перейти к шагу 2), иначе – завершить роботу алгоритма для данного ограничения.

Шаг 9. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > \ldots > j_1$. Выполнить разворачивание графа вдоль координаты x_k, выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow j_1$, приводящих к образованию еще $k-1$ кодов вершин $q_2, q_3, .., q_k$.

Шаг 10. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты: $f(q_n) = f(q_{n-1}) - \delta_{n-1}$, δ_{n-1} $(j_n \quad j_{n-1})$ $(c_n \quad {}_{\mu(}$

где $\mu(\lambda)$ – номер места числа j_λ в коде перестановки q_{n-1}.

Шаг 11. Если $f(q_n) > y^* \forall n \in N_k$, то перейти к шагу 8. Если $f(q_n) \leq y^*$, то запомнить код вершины q_n, перейти к разворачиванию нового кода – к шагу 8.

Шаг 12. Получить k множеств $D_i \subset X$, где $i \in N_k$, найти пересечение $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_k$, вычислить значение функции в точках $x \in D^*$ и сравнить их, выбрав соответствующее экстремальное значение, найти значение функций и вершину структурированного графа, в котором это значение достигается. Завершить работу алгоритма.

Выводы. Предложен подход к решению экстремальные задачи на комбинаторных конфигурациях перестановок на основе теории графов, описан алгоритм. Данный подход имеет практическую значимость и представляет интерес в дальнейшем для построения и развития методов для решения задач на различных комбинаторных конфигурациях при наличии дополнительных сложных ограничений. Дальнейшее развитие работы будет направлено на реализацию и адаптацию сформулированного алгоритма, на разработку новых методов решения комбинаторных задач с учетом других комбинаторных конфигураций.

Г.П. Донець, Л.М. Колєчкіна

ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Розглядається екстремальна задача оптимізації на комбінаторних конфігураціях перестановок, описується підхід до вирішення таких задач на основі теорії графів, враховуючи властивості та структуру множини перестановок. Пропонується алгоритм розв'язання таких задач.

G.A. Donets, L.N. Kolechkina

AN APPROACH SOLUTION EXTREME PROBLEMS ON COMBINATORIAL CONFIGURATIONS IN GRAPHS

We consider the optimization problem of combinatorial optimization configurations permutations, describes the approach to the solution of these problems on the basis of graph theory to the properties and structure of the set of permutations. An algorithm for solving such problems.

1. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Монографія. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 362 с.
2. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 31 – 41.
3. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: Моск. ун-т, 1985. – 308 с.
4. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: «Наука», 1977. – 320 с.
5. *Билецкий В.И., Донец Г.А., Ненахов Э.И.* Об одной задаче неограниченного комбинаторного распознавания // Теорія оптимальних рішень. – 2013. – № 12. – С. 88 – 94.
6. *Колечкина Л.Н., Дверная Е.А., Нагорная А.Н.* Модификация координатного метода решения экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях при условии многокритериальности // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 154 – 161.

Получено 20.03.2016