

# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

*Показано, що ефективність мереж оцінюється на основі їхньої організації як децентралізованих систем.*

© В.М. Горбачук, Г.О. Шулінок,  
О.О. Морозов 2016

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, Г.О. ШУЛІНОК, О.О. МОРОЗОВ

## ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕРЕЖ

**Вступ.** Дана робота мотивована Євро-2012 та конференцією в Ялті 2010 р. [1]. Мережі забезпечують засади для транспортування та логістики, комунікацій, енергопостачання, соціальних взаємодій і фінансування. Оскільки мережі мають велике значення і широкі застосування, вивчення мереж охоплює багато дисциплін. Сьогодні тема крихкості мереж привертає інтерес через спектр таких катастрофічних подій, як 9/11 (теракт у Нью-Йорку 11 вересня 2001 р.), відключення електропостачання у Північній Америці 2003 р., ураган Катріна (Katrina) 2005 р., розвал мосту у м. Мінеаполіс (Minneapolis) 2007 р., розрив середземноморського (Mediterranean) кабелю 2008 р., циклон Нургіс (Nargis) 2008 р., землетрус у провінції Сичуань (Sichuan) Китаю 2008 р. [2]. Більше того, оскільки більшість мереж критичної інфраструктури є великомасштабними і складними за своєю природою, то має зіштовхуватися з відмовами чи розривами (disruptions): інфраструктурні системи незмінно є великомасштабними динамічними «системами систем» з численними компонентами, є нелінійними і просторово розподіленими за багатьма агентами чи особами, які приймають рішення, де панують множинні цілі, що конфліктують і конкурують [3]. Дослідження крихких мереж потребує ідентифікації вразливостей і синергій у невизначеному світі [4]. Стихійні лиха мають безпрецедентний вплив для людських життів у 21-му сторіччі. Лише з січня по жовтень 2005 р. глобально 97490 людей загинули під час стихійних лих, серед них 88117 – під час природних стихійних лих [2].

Федеральне агентство США менеджменту надзвичайного стану визначає катастрофічне стихійне лихо як «подію, що призводить до великої кількості загиблих і поранених; спричиняє широкі збитки чи руйнування обладнання, яке забезпечує і підтримує людські потреби; виробляє величезний попит на ресурси і механізми державної та регіональної відповіді; має наслідком довгостроковий ефект для загальної економічної діяльності; жорстко впливає на спроможності державного, регіонального та приватного секторів розпочинати і витримувати діяльності відповіді».

За згаданими визначеннями стихійному лиху можуть приписувати різні значення в залежності від конкретної області, але вони мають спільне – катастрофічний ефект для людських життів, регіональних або державних ресурсів. Оскільки стихійні лиха мають величезний вплив, менеджмент стихійних лих стає темою все більшої уваги дослідників у різних дисциплінах.

Зосередимося на мережах як складних системах (від транспортних і логістичних мереж у формі ланцюгів постачання до фінансових мереж та Інтернет), щоб розробити концепції, визначення, структури математично строгих і комп'ютеризованих засобів оцінювання роботи й ефективності мереж, а також методів аналізу робастності та вразливості. Крім того, ідентифікуємо синергії, на які можна сподіватися при інтеграції мереж серед фірм чи організацій під час їхніх злиттів і поглинань. Тому з погляду менеджменту стихійних лих (від фізичних до економічних стихійних лих) зосередимося не лише на пом'якшенні стихійних лих шляхом зниження ризику, підвищення готовності до стихійних лих і надзвичайних ситуацій, але й на відновленні після стихійних лих шляхом ідентифікації можливих синергій.

Для вимірювання результативності й ефективності мережі можна запропонувати єдиний підхід, хоча різні мережі можуть діяти за різної організації, особи, яка приймає рішення (ОПР). Централізована ОПР має повний контроль над потоками в мережі. У конкретних вантажних мережах і мережах ланцюгів постачання, в яких фірми володіють своїми власними промисловими підприємствами і дистрибуційними центрами, може бути механізм поведінки постачання певним ритейлерам продукції фірм. Якщо централізований плановик може керувати вантажними потоками з метою оптимізації системи, то фірми спрямовують потоки своєї продукції через різні ланки економічної діяльності свого ланцюга постачання з метою задоволення попиту на цю продукцію та з метою мінімізації своїх витрат.

З іншого боку, у перенавантажених транспортних мережах кожний мандрівник самостійно вибирає свій маршрут поїздки між парою вузлів O/D відправлення (origin) та прибуття (destination) децентралізованим способом, намагаючись зменшити свій час поїздки чи свої витрати на вибраний шлях. Звідси випливає принцип поведінки при децентралізованому прийнятті (оптимальних) рішень користувачами або мережевій рівновазі. Більше того, коли економічні ОПР взаємодіють одна з одною, то може бути конкуренція в межах одного рівня мережі (подібно до фінансових мереж), але кооперація між рівнями мережі.

Подібну поведінку виявляють ОПР у ланцюгах постачання, де одна ОПР володіє промисловим підприємством, а інша – володіє дистрибуційним центром, але вони мають взаємодіяти між собою, щоб задовольняти своїми продуктами споживачів і ринок попиту.

Отже, у мережевих системах можуть бути такі ситуації:

єдина централізована ОПР;

численні ОПР, які діють індивідуально децентралізованим способом подібно до великомасштабних міських транспортних мереж;

нечисленні ОПР (фірми), які взаємодіють, конкурують чи кооперуються між собою у залежності від побудови даної мережі.

ОПР (агенти) характеризуються їхніми власними цілями, відповідними обмеженнями та результатами їхньої поведінки на мережевих потоках, вимірюваними їхніми витратами, прибутками, інвестиціями тощо. Тому прийнятне оцінювання роботи мережі потребує охоплення не тільки базисної мережевої топології (вузлів, ланок та їхніх з'єднань), але й базисної техніко-економічної поведінки, що генерує потоки. Одного лише графа, що складається з вузлів і ланок, які представляють таку організаційну, транспортну чи логістичну мережу, як телекомунікаційна, електроенергична чи фінансова мережа, не досить для оцінювання роботи складної мережі [5].

Вимірювання результативності й ефективності мережі використовує фундаментальні моделі мережевого прийняття рішень – моделі мережевої рівноваги з фіксованим або еластичним попитом при децентралізованому прийнятті рішень, а також оптимізації системи при централізованому прийнятті рішень [6]. Виходячи з мір центральності мережі, можна побудувати єдину міру результативності мережі, основу на децентралізованому прийнятті рішень [2]. Така міра потрібно для багатьох різних застосувань – від транспортних мереж до децентралізованих мереж ланцюгів постачання і фінансових мереж. Мережею можна якісно управляти лише тоді, коли можна вимірювати її результативність [7]. Більше того, єдина міра результативності мережі, що враховує інформацію про потоки і поведінку, дозволяє визначати критичність різних вузлів і ланок через ідентифікацію їхньої важливості та пріоритетності при децентралізованому прийнятті рішень. Ранжування можна порівнювати з відомими підходами, що застосовувалися до Транспортної влади Массачусетської бухти (Massachusetts Bay Transportation Authority, MBTA) у Бостоні та Інтернету [8–10].

У літературі зі складних мереж зазначається, що ідентифікація найцентральніших вузлів є головним питанням характеристики мережі. Властивість центральності мережі має важливі наслідки для визначення вразливості мережі. Тільки краще розуміння критичних компонентів мережі може дозволити ефективніше її захищати.

Поняття ступеня (degree), проміжковості найкоротшого шляху (shortest-path betweenness), близькості (closeness) у соціальних мережах широко застосовують міри центральності вузлів. Ступінь вузла – це число ланок, зв'язаних з вузлом.

Проміжковість найкоротшого шляху для окремого вузла – це відношення кількості найкоротших шляхів, які проходять через даний вузол, до загальної кількості найкоротших шляхів у мережі. Припускалося, що більший ступінь проміжковості вузла свідчить про більшу важливість даного вузла у мережі. Проте ступінь центральності вузла вважається локальною мірою, бо визначається лише числом сусідів цього вузла. З іншого боку, близькість вузла обернена до середньої геодезичної відстані (тобто найкоротшого шляху) між даним вузлом і всіма іншими вузлами, досяжними з цього вузла: мале значення близькості вузла вказує на центральну його роль у мережі. Інша інтерпретація такої близькості вузла у тому, що коротші відстані від даного вузла до інших вузлів зручніші для комунікаційних цілей.

Крім вищезазначених широко вживаних мір центральності, є інші міри центральності, що зосереджуються на різних аспектах мережі. Вузол дістає високу центральність власного вектора (eigenvector centrality) через зв'язки з багатьма іншими вузлами (аналогічно до ступеня центральності) або через зв'язки з вузлами, які мають високу центральність власного вектора. Центральність потоку (flow centrality) і центральність проміжковості з використанням потоків (betweenness centrality using flows) оцінюють важливість вузла, вимірюючи обсяг потоку, який проходить через даний вузол у рамках моделі максимального потоку. Міра центральності бере до уваги мережеві потоки, але не охоплює налаштування їхньої поведінки та ланкових потоків після усунення компонентів мережі. Більше того, для поширення теорії центральності на грані й ланки у мережах застосовувалося поняття проміжковості грані (edge betweenness) у соціальних і біологічних мережах. Аналогічно до проміжковості вузла проміжковість грані – це кількість геодезичних найкоротших шляхів між вузлами, які проходять по грані мережі.

Всі вищезазначені міри центральності стосуються незважених мереж, що задаються виключно бінарними змінними, які вказують на існування зв'язку між кожною парою вузлів без надання ваг ланкам. Недавні дослідження складних мереж доводили, що для врахування взаємозв'язків і потоків між різними вузлами слід надавати свою вагу кожній ланці, яка з'єднує пару вузлів. Такого роду мережі називають зваженими. Мережі задаються не лише своєю топологією, але й також динамікою інформації або потоку трафіку, що має місце на даній структурі. Обсяг трафіку, який характеризує зв'язки у комунікаційних системах і великих транспортних інфраструктурах, є вирішальним для повної характеристики цих мереж [11].

Для зважених мереж відомо дуже мало мір центральності. Для адаптації існуючих мір центральності незважених мереж до зважених мереж пропонується простий метод відображення. Міра центральності зваженої проміжковості (weighted betweenness) включає таку інформацію, як трафік між кожною парою вузлів у мережі. Хоча автори такої міри стверджують, що її утворюють економічні фактори, вона не враховує такі важливі властивості багатьох реальних великомасштабних мереж, як поведінка ОПП та інформація про витрати.

Міра Латора – Марчїорї [8–10] ефективності (efficiency) мережі  $G$  визначається як

$$E_{LM} = E(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in G} \frac{1}{d_{ij}},$$

де  $n$  – число вузлів у мережі  $G$ ,  $d_{ij}$  – довжина найкоротшого шляху (геодезична відстань (distance)) між вузлами  $i$ ,  $j$ .

$E(G)$  вимірює центральність мережі, що показує, наскільки погіршується функція мережі, коли її позбавляють певного компонента. Якщо відстані між парами вузлів менші, то мережа вважається ефективнішою і краще працюючою. Якщо ланка між вузлами  $i$ ,  $j$  не є направленою (directed), то  $d_{ij} = d_{ji}$ .

Для ілюстрації розглянемо мережу, топологія якої задається  $n=3$ ,  $d_{12} = d_{21} = 5$ ,  $d_{23} = d_{32} = 4$ ,  $d_{13} = d_{31} = 3$ . Тоді

$$\begin{aligned} E_{LM} = E(G) &= \frac{1}{3(3-1)} \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{6} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{12+15+20}{60} = \frac{47}{180} = 0.261. \end{aligned}$$

Ступінь кожного вузла цієї мережі рівна 2, бо кожен вузол має 2 зв'язаних з ним ланки. Тому за критерієм ступеня вузла всі 3 вузли однаково важливі у цій мережі. Проміжковість найкоротшого шляху для кожного вузла дорівнює 0, бо кожен вузол безпосередньо зв'язаний з кожним іншим вузлом (з використанням 0 проміжних вузлів). Тому за критерієм проміжковості найкоротшого шляху всі 3 вузли однаково важливі. Близькість вузла 1 становить  $\frac{d_{12} + d_{13}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$ , вузла 2 –  $\frac{d_{21} + d_{23}}{2} = \frac{5+4}{2} = 4.5$ , вузла 3 –  $\frac{d_{31} + d_{32}}{2} = \frac{3+4}{2} = 3.5$ . Тому за критерієм близькості вузол 3 є найважливішим.

Загалом мережу  $G$  задають множина  $N$  вузлів (nodes) і множина  $L$  направлених ланок (links). Нехай  $a$  – ланка мережі, що зв'язує пару вузлів. Позначимо  $p$  шлях (path), який складається з послідовності ланок, що зв'язують пару вузлів О/Д. Припустимо, шляхи є ациклічними. У мережах міського транспорту вузли відповідають пунктам відправлення і призначення, а також перехрестям; з іншого боку, ланки відповідають дорогам або вулицям. У вантажних мережах ланки відповідають залізничним лініям або дорогам для вантажівок. Тому на транспорті шлях може відповідати послідовності доріг або залізничних ланок, що утворюють маршрут від пункту відправлення до пункту прибуття. У комунікаційних мережах вузли відповідають маршрутизаторам; у логістичних мережах і мережах ланцюгів постачання вузли можуть відповідати виробникам, дистрибуторам і ринкам попиту; у фінансових та інших економічних мережах вузли можуть також відповідати ОПР – від фінансових джерел коштів до кінцевих

споживачів. Ланки у мережевих моделях виражають фізичні зв'язки (кабелі, лінії передач, виробничі лінії тощо) чи логічні зв'язки (економічні трансакції), користуючись певним графічним формалізмом. У соціальних мережах вузли відповідають фізичним особам або їхнім організаціям, а ланки – суспільним зв'язкам.

Нехай  $P_w$  – множина шляхів  $p$ , що зв'язують пару  $w$  вузлів О/Д. Позначимо  $P$  множину всіх шляхів  $P_w$  у мережі. Припустимо, мережа має  $n_w$  пар  $w \in W$  вузлів О/Д і є (строго) зв'язною (існує принаймні один шлях, що зв'яже кожен пару вузлів О/Д).

Нехай  $x_p$  – невід'ємний потік по шляху  $p$ , а  $f_a$  – потік по ланці  $a$ . Ці потоки у різних постановках відповідатимуть транспортним засобам, товарам або продуктам, комп'ютерним повідомленням, фінансовим потокам, потокам електроенергії тощо. Потоки по шляхах на мережі формують вектор  $\vec{x} \in R_+^{n_p}$ , де  $n_p$  – число шляхів у мережі; потоки по ланках формують вектор  $\vec{f} \in R^n$ , де  $n$  – число ланок мережі.

Позначимо  $c_a$  витрати, яких зазнає користувач, проходячи ланку  $a$ ; ці витрати формують вектор  $\vec{c} \in R_+^n$ . Позначимо  $C_p$  витрати користувача на шляху  $p \in P$ ; такі витрати формують вектор  $\vec{C} \in R_+^{n_p}$ .

Позначимо  $d_w$  попит, пов'язаний з парою  $w \in W$  вузлів О/Д. Припустимо, цей попит відомий і фіксований. Тоді  $\forall w \in W$  має виконуватися рівняння збереження потоків, за яким даний попит рівний сумі (невід'ємних) потоків по шляхах, що з'єднують пару  $w$  вузлів О/Д:

$$d_w = \sum_{p \in P_w} x_p \quad \forall w \in W, \quad (1)$$

$$x_p \geq 0 \quad \forall p \in P.$$

Позначимо  $\lambda_w$  некорисність (disutility), пов'язану з парою  $w$  вузлів О/Д.

Потік по ланці пов'язується з потоками по шляхах через інше рівняння збереження потоків, за яким потік по ланці рівний сумі потоків по шляхах, що містять цю ланку:

$$f_a = \sum_{p \in P} x_p \delta_{ap} \quad \forall a \in L,$$

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1, & \text{якщо шлях } p \text{ містить } a; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Витрати користувача на шляху дорівнюють сумі витрат користувача на ланках, з яких складається цей шлях:

$$C_p = \sum_{a \in L} c_a \delta_{ap} \quad \forall p \in P.$$

Припустимо, що витрати користувача на ланці – неперервна і невід’ємна функція всіх компонентів вектора  $\vec{f}$ :

$$c_a = c_a(\vec{f}) \quad \forall a \in L,$$

звідки

$$C_p = \sum_{a \in L} c_a \delta_{ap} = \sum_{a \in L} c_a ((f_a)_{a \in L}) \delta_{ap} = \sum_{a \in L} c \left( \left( \sum_{p \in P} x_p \delta_{ap} \right)_{a \in L} \right) \delta_{ap} = C_p(\vec{x}),$$

тобто витрати на шляху  $p \in P$  є функцією змінних потоків по всіх шляхах.

За першим принципом Уордропа [12 – 15], вектор  $\vec{x}^* \in R_+^{np}$  потоків називають мережевою рівновагою при фіксованому попиті, якщо для кожної пари  $w \in W$  вузлів O/D цей вектор задовольняє умові (1), а для кожного шляху  $p \in P_w$  цей вектор задовольняє умові

$$C_p(\vec{x}^*) = \begin{cases} \lambda_w^* & \text{при } x_p^* > 0, \\ \geq \lambda_w^* & \text{при } x_p^* = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Умова (2) означає, що витрати користувача на всіх шляхах, які використовуються для з’єднання пари O/D, однакові для  $x_p^* > 0$  і не менші некорисності для  $x_p^* = 0$ : користувачу немає стимулу змінювати  $x_p^*$ .

Вектор  $\vec{x}^*$  є мережевою рівновагою тоді й тільки тоді, коли він є розв’язком скінченновимірних варіаційних нерівностей для потоків по шляхах [14, 15]:

$$\sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} C_p(\vec{x}^*) (x_p - x_p^*) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in R_+^{np} \text{ за умови (1).}$$

Аналогічно вектор  $\vec{x}^*$  є мережевою рівновагою тоді й тільки тоді, коли він є розв’язком скінченновимірних варіаційних нерівностей для потоків по ланках.

Близькість може використовуватися не лише для оцінки ефективності роботи мережі, але й для оцінки функціональності мережі за умови збереження зв’язності мережі після усунення мережевого компонента. Такої жорсткої умови не потребує уніфікована міра роботи (ефективності) мережі, в якій рішення приймаються децентралізовано (поведінка ОПР є децентралізованою): природне чи неприродне лихо може легко роз’єднувати пари вузлів відправлення і прибуття. Міра Нагурней – Кіанг [2] ефективності для даної мережевої топології  $G$  та фіксованого вектора  $\vec{d}$  фіксованого попиту (demand) визначається

$$E_{NQ} = E(G, d) = \frac{1}{n_w} \sum_{w \in W} \frac{d_w}{\lambda_w},$$

де  $n_w$  – число пар вузлів O/D у мережі,  $d_w \in \vec{d}$  – фіксований попит для пари  $w \in W$  вузлів O/D,  $\lambda_w$  – некорисність для пари  $w$  вузлів O/D; при еластичному попиті вектор  $\vec{d}$  вважається рівноважним.

Ефективність децентралізованих систем залежить від їхньої організації.

*V.M. Gorbachuk, G.A. Shulinok, A.A. Morozov*

#### ОЦЕНИВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕТЕЙ

Показано, что эффективность сетей оценивается на основе их организации как децентрализованных систем.

*V.M. Gorbachuk, G.O. Shulinok, O.O. Morozov*

#### NETWORK EFFICIENCY ESTIMATION

It is shown the efficiency of networks is estimated on the basis of their organization as decentralized systems.

1. *Gorbachuk V.* On the transportation subproblem of Euro-2012 / *Network science*. – Kyiv: V.M. Glushkov Institute of Cybernetics; Texas A&M University; University of Florida, 2010. – P. 6 – 7.
2. *Nagurney A., Qiang Q.* Fragile networks: identifying vulnerabilities and synergies in an uncertain world. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009. – 313 p.
3. *Горбачук В.М.* Шляхи подолання ринкових недосконалостей у галузі телекомунікацій // Вісник Одеського національного університету. Серія: економіка. – 2013. – Т. 18. – Випуск 3. – С. 84 – 87.
4. *Горбачук В.М., Гаркуша Н.І.* Парадокс Браесса й умови його врегулювання // PDMU-2010 (Новий Світ) – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2010. – С. 52 – 53.
5. *Горбачук В.М.* Установление платы за трафик по сети связи // Компьютерная математика. – 2013. – № 1. – С. 3 – 12.
6. *Горбачук В.М., Морозов О.О.* Вимірювання ефективності мереж // Інформаційно-комп'ютерні технології – 2016. – Житомир: Житомирський державний технологічний університет, 2016. – С. 63–64.
7. *Горбачук В.М., Морозов О.О.* До вимірювання системних ризиків мереж // Проблеми телекомунікацій. – К.: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. – С. 143 – 145.
8. *Latora V., Marchiori M.* Efficient behavior of small-world networks // *Physical review letters*. – 2001. – 87. – 198701.
9. *Latora V., Marchiori M.* Is the Boston subway a small-world network? // *Physica A*. – 2002. – 314. – P. 109–113.
10. *Latora V., Marchiori M.* How the science of complex networks can help developing strategies against terrorism // *Chaos, solitons and fractals*. – 2004. – 20. – P. 69 – 75.
11. *Gorbachuk V., Chumakov B.* The analytic approach to city traffic network control // *Modelare matematica, optimizare si tehnologii informationale*. – Chisinau: Evrica, 2010. – P. 94 – 99.
12. *Wardrop J.G.* Some theoretical aspects of road traffic research // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. – 1952. – Part II, 1. – P. 325 – 378.
13. *Beckmann M.J., McGuire C.B., Winsten C.B.* Studies in the economics of transportation. – New Haven, CT: Yale University Press, 1956.
14. *Smith M.J.* Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria // *Transportation research B*. – 1979. – 13. – P. 259–304.
15. *Dafermos S.* Traffic equilibrium and variational inequalities // *Transportation science*. – 1980. – 14. – P. 42 – 54.

Одержано 26.04.2016