УДК 519.8

Л.Ф. ГУЛЯНИЦЬКИЙ, І.І. РЯСНА

ДО ФОРМАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Запропоновано підхід до формалізації поняття «нечіткий комбінаторний об'єкт», що дозволяє формалізувати як відомі, так і нові класи задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Проведено класифікацію нечітких комбінаторних об'єктів та наведено приклади таких нечітких комбінаторних об'єктів, як нечіткі розміщення, нечіткі сполучення, нечіткі перестановки, нечіткі графи.

Вступ. Об'єктами, які зазвичай розглядаються в задачах комбінаторної оптимізації (ЗКО), є перестановки, розміщення, сполучення, графи, підмножини, цілі числа та інші структури, узагальненням яких є поняття комбінаторного об'єкта [1]. Для формалізації ЗКО на нечітких множинах необхідно визначити поняття нечіткого комбінаторного об'єкта.

Базовим поняттям теорії нечітких множин є функція належності [2]. Нехай задано універсальну множину $U=\{u\}$ та упорядковану множину M, яка є множиною належностей. Нечітка множина $\underset{\sim}{A}$ задається відображенням $\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to M$.

Функція належності нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$ у сенсі Л. Заде є відображення $\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to M$, де $M=[0,1]$, тоді $u \in \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow \mu(u)>0$ та $u \notin \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow \mu(u)=0$. Зазначимо деякі суттєві відмінності теорії множин і теорії нечітких множин у сенсі Л. Заде [2]. По-перше, множина усіх підмножин або булеан множини U є дистрибутивною ґраткою з доповненнями $A \bigcup \bar{A}=U$, $A \bigcap \bar{A}=\varnothing$, де $\bar{A}$ – доповнення множини A. Однак множина усіх нечітких підмножин множини U є дистрибутивною ґраткою без доповнень $\underset{\sim}{A} \bigcup \bar{\underset{\sim}{A}} \neq U$, $\underset{\sim}{A} \bigcap \bar{\underset{\sim}{A}} \neq \varnothing$, де функція належності множини $\bar{\underset{\sim}{A}}$ (нечіткого доповнення у сенсі Л. Заде) $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(u)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$. По-друге, бінарним операторам об'єднання та перетину множин відповідає значна кількість пар нечітких операторів, які є трикутними нормами та конормами [3].

Функція належності нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$ у сенсі Г. Гогена є відображення $\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to M$, де M – деяка ґратка [2].

Існує багато інших моделей нечітких множин, які відрізняються одна від одної, наприклад, областю визначення або областю значень та використовуються у певних прикладних задачах [3].

Визначення комбінаторного об'єкта. Використаємо поняття комбінаторного об'єкта, яке введено в [1]. Далі будемо розглядати лише скінченні множини.

Нехай задано множину $Y = \{1, 2, ..., m\}$, яку називатимемо нумеруючою множиною [4], множину $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$, яку назвемо твірною множиною. Множину Z розглядаємо як лінійно упорядковану: $z_1 < z_2 < ... < z_n$. Нехай X – базова множина, яка породжується, як показано далі, на основі твірної множини, та $\varphi: Y \to X$ – відображення, що задовольняє деякій системі обмежень Ω.

Означення 1. Комбінаторним об'єктом називається кортеж

$$\mathrm{K} = \langle \varphi, X, \Omega \rangle .$$

Конкретизуючи вид базової множини можна породжувати комбінаторні об'єкти різного типу, які формально класифікуються таким чином.

Означення 2. Комбінаторними об'єктами 1-го порядку називаються такі комбінаторні об'єкти, у яких базова множина співпадає з твірною:

$$\mathrm{K}_{(1)} = \langle \varphi, X_{(1)}, \Omega \rangle, \text{ де } X_{(1)} \equiv Z .$$

Означення 3. Комбінаторними об'єктами *r*-го порядку (*r*> 1) називаються комбінаторні об'єкти

$$\mathrm{K}_{(r)} = \langle \varphi, X_{(r)}, \Omega \rangle, \text{ де } X_{(r)} = X_{(r-1)} \bigcup Z^r, \ \varphi: Y \to X_{(r)} .$$

Наприклад, комбінаторний об'єкт 2-го порядку

$$\mathrm{K}_{(2)} = \langle \varphi, X_{(2)}, \Omega \rangle ,$$

де $\varphi: Y \to X_{(2)}$, $X_{(2)} = X_{(1)} \cup Z^2 = Z \bigcup Z^2$, $Z \bigcup Z^2 \equiv \left(Z, Z^2\right)$ – повний граф Бержа, Z – множина вершин графа, Z^2 – множина дуг.

Визначення нечіткого комбінаторного об'єкта. Нечіткий комбінаторний об'єкт будемо формалізувати як кортеж $\underset{\sim}{\mathrm{K}} = \langle Y, \varphi, X, \Omega \rangle$, у якому множина $\varphi(Y)$ є деякою нечіткою множиною. Нечіткість множини $\varphi(Y)$ може породжуватися на базі нечіткості будь-якого з елементів φ, X, Ω кортежу $\underset{\sim}{\mathrm{K}}$.

Означення 4. Нечіткою твірною множиною назвемо нечітку множину $\underset{\sim}{Z}$, яка задається відображенням $\mu_{\underset{\sim}{Z}}: Z \to M$, де M – множина належностей, Z – твірна множина.

Приклад 1. Нехай $\mu_{\underset{\sim}{Z}}: Z \to [0,1]$, тобто $\underset{\sim}{Z}$ є нечіткою множиною у сенсі Л. Заде або множиною упорядкованих пар:

$$\underset{\sim}{Z} = \left\{ \left(z_1, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_1) \right), \left(z_2, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_2) \right), \dots, \left(z_n, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_n) \right) \right\} = \left\{ \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right) \right\}_{i=1}^{n}.$$

Множина $\underset{\sim}{Z}$ – (не упорядкована) множина упорядкованих пар, де $\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i)$ – степінь прояву деякої властивості, яка, зазвичай, є результатом вимірювання. Введемо на множини $\underset{\sim}{Z}$ відношення лінійного порядку наступним чином: $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j$, $z_i < z_j \Rightarrow \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right) < \left(z_j, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_j) \right)$, тобто упорядкування проводиться за першою компонентою упорядкованої пари. Позначимо $\underset{\sim}{z_i} = \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right)$, тоді $i < j \Rightarrow \underset{\sim}{z_i} < \underset{\sim}{z_j}$, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z_i} \right)_{i=1}^{n}$ – лінійно упорядкована нечітка твірна множина.

Приклад 2. Нехай $\left(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k \right)$ – упорядкована сукупність деяких властивостей, $\mu_j(z_i)$ – степінь прояву властивості ξ_j елемента z_i, $\vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}: Z \to [0,1]^k$, де $[0,1]^k$ – декартова степінь множини $[0,1]$, $\vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) = \left(\mu_1(z_i), \dots, \mu_k(z_i) \right)$. Тоді

$$\underset{\sim}{Z} = \left\{ \left(z_1, \left(\mu_1(z_1), \dots, \mu_k(z_1) \right) \right), \dots, \left(z_n, \left(\mu_1(z_n), \dots, \mu_k(z_n) \right) \right) \right\} = \left\{ \left(z_i, \vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right) \right\}_{i=1}^{n}$$

є векторнозначною нечіткою множиною [3], яку можна подати як матрицю “об’єкт-властивість”.

Уведемо на векторнозначній нечіткій множині $\underset{\sim}{Z}$ відношення лінійного порядку наступним чином: $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j$, $z_i < z_j \Rightarrow \left(z_i, \vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right) < \left(z_j, \vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_j) \right)$. Позначимо $\underset{\sim}{z_i} = \left(z_i, \vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right)$, тоді $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z_i} \right)_{i=1}^{n}$ – лінійно упорядкована векторнозначна нечітка твірна множина.

Означення 5. Лінійно упорядкованою нечіткою твірною множиною назвемо нечітку множину

$$\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z_i} \right)_{i=1}^{n},$$

де $\underset{\sim}{z_i} = \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \right)$, $z_i \in Z = \{ z_1, z_2, \dots, z_n \}$, $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j$, $z_i < z_j \Rightarrow \underset{\sim}{z_i} < \underset{\sim}{z_j}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_{\underset{\sim}{Z}}: Z \to M$, M – задана множина належностей.

Означення 6. Нечіткими комбінаторними об’єктами 1-го порядку першого типу назвемо такі комбінаторні об’єкти, у яких базова множина співпадає із нечіткою твірною множиною:

$$\underset{\sim}{K}^{1}_{(1)} = \left\langle Y, \varphi, \underset{\sim}{X}_{(1)}, \Omega \right\rangle,$$

де $\underset{\sim}{X}_{(1)} \equiv \underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^{n}$, $\varphi : Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$, $Y = \{1, ..., m\}$.

Наведемо приклади нечітких комбінаторних об’єктів 1-го порядку першого типу.

Приклад 3. Нехай $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^{n}$ – лінійно упорядкована нечітка твірна множина. Розглянемо наступні випадки.

3.1. Нехай $m < n$, $\varphi : Y \to \left(\underset{\sim}{X}_{(1)} \equiv \underset{\sim}{\mathbf{Z}}\right)$ – деяке (чітке) відображення.

Тоді лінійно упорядковану нечітку множину $\varphi(Y) = (\varphi(1), ..., \varphi(j), ..., \varphi(m)) = = \left(\underset{\sim}{z}_{i_1}, ..., \underset{\sim}{z}_{i_j}, ..., \underset{\sim}{z}_{i_m}\right)$, де $\varphi(j) = \underset{\sim}{z}_{i_j}$, $\underset{\sim}{z}_{i_j} \in \underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, будемо називати розміщенням з повтореннями нечітких елементів множини $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$. Кількість таких розміщень дорівнює n^m.

3.2. Нехай $m < n$, $\varphi : Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$ – строго монотонне відображення:

$$\varphi(j) = \underset{\sim}{z}_{i_j},\ \varphi(k) = \underset{\sim}{z}_{i_k},\ j < k \Rightarrow i_j < i_k,\ j, k \in Y,\ i_j, i_k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Тоді нечітка множина $\varphi(Y)$ є сполученням нечітких елементів множини $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$. Кількість таких сполучень дорівнює $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

3.3. Нехай $m = n$, $\varphi : Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$ – ін’єктивне відображення: $j \neq k \Rightarrow \Rightarrow \varphi(j) \neq \varphi(k)$. Тоді $\varphi(Y)$ – перестановка нечітких елементів множини $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$. Кількість таких перестановок дорівнює $n!$.

3.4. Нехай $m < n$, $\varphi : Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$ – ін’єктивне відображення. Тоді $\varphi(Y)$ – розміщення без повторень нечітких елементів множини $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$. Кількість таких розміщень дорівнює $\dfrac{n!}{m!}$.

Зауважимо, що множина $\varphi(Y)$ у розглянутих нечітких комбінаторних об’єктів 1-порядку першого типу є нечіткою множиною у сенсі Л. Заде (приклад 1) або векторнозначною нечіткою множиною (приклад 2), або може бути більш складною нечіткою множиною, у залежності від нечіткої моделі твірної множини, яку було використано. Наприклад, твірна множина може бути нечіткою множиною у сенсі Г. Гогена або нечіткою мультимножиною.

Вище були розглянуті чіткі обмеження Ω та чітке відображення φ. Можна, також, розглядати інші нечіткі моделі (типи) комбінаторних об'єктів 1-порядку, у яких окрім нечіткої твірної множини застосовується нечітке відображення $\underset{\sim}{\varphi}$ та/або нечіткі обмеження Ω. Наведемо означення деяких таких об'єктів.

Означення 7. Нечіткими комбінаторними об'єктами 1-го порядку другого типу назвемо такі комбінаторні об'єкти, у яких відображення $\underset{\sim}{\varphi}$ є нечітким, а базова множина співпадає з (чіткою) твірною множиною:

$$\underset{\sim}{K}_{(1)}^{2}=\left\langle Y,\underset{\sim}{\varphi},X_{(1)},\Omega\right\rangle,$$

де $\underset{\sim}{\varphi}:Y\to X_{(1)}$, $\underset{\sim}{\varphi}(j)=\left(\varphi(j),\nu_j\right)$, $X_{(1)}\equiv Z$, $j\in Y$, $\nu_j\in M$, M – множина належностей.

Приклад 4. Нехай $Z=\left(z_i\right)_{i=1}^{n}$ – лінійно упорядкована (чітка) твірна множина. Розглянемо наступні випадки.

4.1. Нехай $m<n$, $\underset{\sim}{\varphi}:Y\to X_{(1)}$ – нечітке відображення у сенсі Л. Заде.

Позначимо $\varphi(j)=z_{i_j}$, тоді упорядковану нечітку множину $\underset{\sim}{\varphi}(Y)=$ $=\left(\left(z_{i_j},\nu_j\right)\,\middle|\,z_{i_j}=\varphi(j),\,z_{i_j}\in Z,\,\nu_j\in[0,1]\right)_{j=1}^{m}$ будемо називати нечітким розміщенням з повтореннями елементів множини Z. Кількість таких розміщень дорівнює n^m.

4.2. Нехай $m<n$, $\underset{\sim}{\varphi}:Y\to X_{(1)}$ – строго монотонне відображення:

$\underset{\sim}{\varphi}(j)=\left(\varphi(j),\nu_j\right)$, $\underset{\sim}{\varphi}(k)=\left(\varphi(k),\nu_k\right)$, $\varphi(j)=z_{i_j}$, $\varphi(k)=z_{i_k}$, $z_{i_j},z_{i_k}\in Z$, $j<k\Rightarrow i_j<i_k\Leftrightarrow z_{i_j}<z_{i_k}$, $z_{i_j}<z_{i_k}\Rightarrow\underset{\sim}{\varphi}(j)<\underset{\sim}{\varphi}(k)$, $j,k\in Y$, $i_j,i_k\in\{1,2,...,n\}$, $\nu_j,\nu_k\in[0,1]$. Тоді $\underset{\sim}{\varphi}(Y)$ будемо називати нечітким сполученням елементів (чіткої) твірної множини Z. Кількість таких сполучень дорівнює $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

4.3. Нехай $m=n$, $\underset{\sim}{\varphi}:Y\to X_{(1)}$ – ін'єктивне відображення: $\underset{\sim}{\varphi}(j)=\left(\varphi(j),\nu_j\right)$, $\underset{\sim}{\varphi}(k)=\left(\varphi(k),\nu_k\right)$, $\varphi(j)=z_{i_j}$, $\varphi(k)=z_{i_k}$, $z_{i_j},z_{i_k}\in Z$, $j\neq k\Rightarrow i_j\neq i_k\Leftrightarrow z_{i_j}\neq z_{i_k}$, $z_{i_j}\neq z_{i_k}\Rightarrow\underset{\sim}{\varphi}(j)\neq\underset{\sim}{\varphi}(k)$, $j,k\in Y$, $i_j,i_k\in\{1,2,...,n\}$, $\nu_j,\nu_k\in[0,1]$. Тоді $\underset{\sim}{\varphi}(Y)$ будемо називати нечіткою перестановкою елементів (чіткої) множини Z. Кількість таких перестановок дорівнює $n!$.

4.4. Нехай $m < n$, $\underset{\sim}{\varphi}: Y \to X_{(1)}$ – ін'єктивне відображення. Тоді $\underset{\sim}{\varphi}(Y)$ будемо називати нечітким розміщенням без повторень елементів множини Z або нечітким розміщенням. Кількість таких розміщень дорівнює $\frac{n!}{m!}$.

Означення 8. Нечіткими комбінаторними об'єктами 1-го порядку третього типу назвемо такі комбінаторні об'єкти, у яких відображення $\underset{\sim}{\varphi}$ є нечітким, а базова множина співпадає із нечіткою твірною множиною:

$$\underset{\sim}{K}^3_{(1)} = \left\langle Y, \underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{X}_{(1)}, \Omega \right\rangle,$$

де $\underset{\sim}{\varphi}: Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$, $\underset{\sim}{\varphi}(j) = \left(\varphi(j), \nu_j\right)$, $\underset{\sim}{X}_{(1)} \equiv \underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, $j \in Y$, $\nu_j \in M_1$, M_1 – множина належностей.

Приклад 5. Нехай $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^n$ – лінійно упорядкована нечітка твірна множина, $\underset{\sim}{z}_i = \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i)\right)$, $\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \in M$, M – множина належностей, $m < n$, $\underset{\sim}{\varphi}: Y \to \underset{\sim}{X}_{(1)}$ – нечітке відображення у сенсі Л. Заде. Позначимо $\varphi(j) = z_{i_j}$, тоді $\underset{\sim}{\varphi}(j) = \left(\left(z_{i_j}, \mu_{\underset{\sim}{Z}}\left(z_{i_j}\right)\right), \nu_j\right)$, $z_{i_j} \in Z$, $\mu_{\underset{\sim}{Z}}\left(z_{i_j}\right) \in M$, $\nu_j \in M_1$, $j \in Y$, $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$, M_1 – множина належностей. Упорядковану нечітку множину $\underset{\sim}{\varphi}(Y) = \left(\underset{\sim}{\varphi}(j)\right)_{j=1}^m$ будемо називати нечітким розміщенням з повтореннями нечітких елементів твірної множини. Кількість таких розміщень дорівнює n^m.

Зрозуміло, що різноманіття моделей (типів) нечітких комбінаторних об'єктів 1-го порядку значно ширше, ніж у вищенаведених прикладах.

Означення 9. Нечітким комбінаторним об'єктом r-го порядку (r>1) назвемо кортеж $\underset{\sim}{K}_{(r)} = \left\langle Y, \varphi, X_{(r)}, \Omega \right\rangle$, де $X_{(r)} = X_{(r-1)} \bigcup Z^r$, причому хоча б один з елементів кортежу φ, $X_{(r)}$ або Ω має бути нечітким.

Означення 10. Нечіткими комбінаторними об'єктами 2-го порядку першого типу будемо називати такі комбінаторні об'єкти, у яких базова множина породжується з нечіткої твірної множини:

$$\underset{\sim}{K}^1_{(2)} = \left\langle Y, \varphi, \underset{\sim}{X}_{(2)}, \Omega \right\rangle,$$

де $Y = (Y_1, Y_2)$, $Y_1 = (1, 2, \dots, p)$, $Y_2 = \left((1,1), \dots, (1, p), \dots, (p, 1), \dots, (p, p)\right)$,

$$\underset{\sim}{X}_{(2)} = \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \bigcup \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \times \underset{\sim}{\mathbf{Z}},\ \underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^n,\ \underset{\sim}{z}_i = \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i)\right),\ \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \in M,$$

$$\varphi(Y)=(\varphi(Y_1),\varphi(Y_2))=(\varphi_1,\varphi_2)\,,\ \varphi_1:Y_1\to\underset{\sim}{\mathbf{Z}}\,,\ \varphi_1(j)=\underset{\sim}{z}_{i_j}\,,\ \varphi_1(Y_1)=\left(\underset{\sim}{z}_{i_j}\right)_{j=1}^{p},$$

$$\varphi_2(j,k)=\left(\left(\underset{\sim}{z}_{i_j},\underset{\sim}{z}_{i_k}\right),\nu_{jk}\right),\ (j,k)\in Y_2,\ i_j,i_k\in\{1,2,...,n\},\ \nu_{jk}=\nu\left(\underset{\sim}{z}_{i_j},\underset{\sim}{z}_{i_k}\right)\in\{0,1\},$$

M – множина належностей.

Приклад 6. Нехай $p<n$, $\varphi_1:Y_1\to\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$ – ін'єктивне відображення, де $\varphi_1(j)=\underset{\sim}{z}_{i_j}$, $\varphi_1(Y_1)=\left(\underset{\sim}{z}_{i_j}\right)_{j=1}^{p}$, $\varphi_2(j,k)=\left(\left(\underset{\sim}{z}_{i_j},\underset{\sim}{z}_{i_k}\right),\nu_{jk}\right)$, $\nu_{jk}\in\{0,1\}$. Покладемо, що $\nu_{jk}\cdot\nu_{kj}=0$, $\nu_{jk}\cdot\nu_{kl}\neq 0\Rightarrow\nu_{jl}\neq 0$, $j,k,l\in\{1,2,...,p\}$. Тоді $\varphi(Y)=(\underset{\sim}{\mathbf{V}},E)$ є графом, де $\underset{\sim}{\mathbf{V}}=\varphi_1(Y_1)$ – нечітка множина вершин цього графа, $E=\left\{\left(\underset{\sim}{z}_{i_j},\underset{\sim}{z}_{i_k}\right)\,\middle|\,\nu_{jk}=1\right\}$ – множина дуг. Цей граф визначає відношення строгого порядку на нечіткій лінійно упорядкованій множині $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$, яка є розміщенням без повторень нечітких елементів множини $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$.

Приклад 7. Нехай $p=n$, $\varphi_1(j)=\underset{\sim}{z}_j$ (тобто $\varphi_1(Y_1)=\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$), $\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_j)\in[0,1]$, $\varphi_2(j,k)=\left(\left(\underset{\sim}{z}_j,\underset{\sim}{z}_k\right),\nu_{jk}\right)$, $\nu_{jk}\in\{0,1\}$, $j,k\in\{1,2,...,n\}$. Покладемо $\nu_{jk}=1\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_j)\leq\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_k)$. Тоді $\varphi(Y)=(\underset{\sim}{\mathbf{Z}},E)$ – граф, де $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$ – множина вершин цього графа, $E=\left\{\left(\underset{\sim}{z}_j,\underset{\sim}{z}_k\right)\,\middle|\,\nu\left(\underset{\sim}{z}_j,\underset{\sim}{z}_k\right)=1\right\}$ – множина дуг. Цей граф визначає відношення квазіпорядку на нечіткій (у сенсі Л. Заде) множині $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$.

Означення 11. Нечіткими комбінаторними об'єктами 2-го порядку другого типу будемо називати такі комбінаторні об'єкти, у яких базова множина породжується з (чіткої) твірної множини, а відображення φ є нечітким:

$$\underset{\sim}{K}_{(2)}^{2}=\left\langle Y,\underset{\sim}{\varphi},X_{(2)},\Omega\right\rangle,$$

де $Y=(Y_1,Y_2)$, $Y_1=(1,2,...,p)$, $Y_2=((1,1),...,(1,p),...,(p,1),...,(p,p))$,

$$X_{(2)}=Z\cup Z\times Z\,,\ Z=(z_i)_{i=1}^{n},\ \underset{\sim}{\varphi}(Y)=\left(\varphi(Y_1),\underset{\sim}{\varphi}(Y_2)\right)=\left(\varphi_1,\underset{\sim}{\varphi}_2\right),\ \varphi_1:\mathrm{Y}_1\to Z\,,$$

$$\varphi_1(j)=z_{i_j}\,,\ \varphi_1(Y_1)=\left(z_{i_j}\right)_{j=1}^{p},\ \underset{\sim}{\varphi}_2(j,k)=\left(\left(z_{i_j},z_{i_k}\right),\nu_{jk}\right),\ (j,k)\in Y_2,$$

$i_j,i_k\in\{1,2,...,n\}$, $\nu_{jk}=\nu\left(z_{i_j},z_{i_k}\right)\in M$, M – множина належностей.

Приклад 8. Нехай $p = n$, $\varphi_1 : \mathrm{Y}_1 \to Z$ – ін'єктивне відображення, де $\varphi_1(j) = z_{i_j}$, $\varphi_1(Y_1) = \left(z_{i_j}\right)_{j=1}^{n}$ (тобто $\varphi_1(Y_1)$) – перестановка елементів множини Z), $\underset{\sim}{\varphi}_2(j,k) = \left(\left(z_{i_j}, z_{i_k}\right), \nu_{jk}\right)$, $\nu_{jk} \in [0,1]$, $j,k \in \{1,2,...,n\}$. Тоді $\underset{\sim}{\varphi}(Y) = (V, \underset{\sim}{E})$ – нечіткий граф Бержа [2], $V = \varphi_1(Y_1)$ – множина вершин цього графа, $\underset{\sim}{E}$ – нечітка множина дуг.

Означення 12. Нечіткими комбінаторними об'єктами 2-го порядку третього типу будемо називати такі комбінаторні об'єкти, у яких базова множина та відображення φ є нечіткими:

$$\underset{\sim}{\mathrm{K}}_{(2)}^{3} = \left\langle Y, \underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{X}_{(2)}, \Omega \right\rangle,$$

де $Y = (Y_1, Y_2)$, $Y_1 = (1, 2..., p)$, $Y_2 = ((1,1),...,(1,p),...,(p,1),...,(p,p))$, $\underset{\sim}{X}_{(2)} = \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \times \underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^{n}$, $\underset{\sim}{z}_i = \left(z_i, \mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i)\right)$, $\mu_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \in M_1$, M_1 – множина належностей, $\underset{\sim}{\varphi}(Y) = \left(\varphi(Y_1), \underset{\sim}{\varphi}(Y_2)\right) = \left(\varphi_1, \underset{\sim}{\varphi}_2\right)$, $\varphi_1 : Y_1 \to \underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, $\varphi_1(j) = \underset{\sim}{z}_{i_j}$, $\varphi_1(Y_1) = \left(\underset{\sim}{z}_{i_j}\right)_{j=1}^{p}$, $\underset{\sim}{\varphi}_2(j,k) = \left(\left(\underset{\sim}{z}_{i_j}, \underset{\sim}{z}_{i_k}\right), \nu_{jk}\right)$, $(j,k) \in Y_2$, $i_j, i_k \in \{1,2,...,n\}$, $\nu_{jk} = \nu\left(\underset{\sim}{z}_{i_j}, \underset{\sim}{z}_{i_k}\right)$, $\nu_{jk} \in M_2$, M_2 – множина належностей.

Приклад 9. Нехай $p = n$, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$ – лінійно упорядкована векторнозначна нечітка твірна множина, тобто $\underset{\sim}{\mathbf{Z}} = \left(\underset{\sim}{z}_i\right)_{i=1}^{n}$, $\underset{\sim}{z}_i = \left(z_i, \vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i)\right)$, $\vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) = \left(\mu_1(z_i), ..., \mu_t(z_i), ..., \mu_k(z_i)\right)$, $\mu_t(z_i) \in [0,1]$. Нехай $\varphi_1(i) = \underset{\sim}{z}_i$ та $\forall z_i \in Z$ $\vec{\mu}_{\underset{\sim}{Z}}(z_i) \neq \vec{0}$. Покладемо $\nu_{ij} = \sum_{t=1}^{k} \min\left(\mu_t(z_i), \mu_t(z_j)\right) \Big/ \sum_{t=1}^{k} \max\left(\mu_t(z_i), \mu_t(z_j)\right)$, тоді $\nu_{ij} \in [0,1]$, $\nu_{ij} = \nu_{ji}$, $\nu_{ii} = 1$. Отже, $\underset{\sim}{\varphi}(Y) = \left(\underset{\sim}{\mathbf{Z}}, \underset{\sim}{E}\right)$ – нечіткий граф, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$ – множина вершин цього графа, $\underset{\sim}{E}$ – множина дуг, яка визначає нечітке відношення схожості [2].

Вочевидь, що різноманіття моделей (типів) нечітких комбінаторних об'єктів 2-го порядку значно ширше наведених. Аналогічно можна визначити нечіткі комбінаторні об'єкти 3-го та вищих порядків.

Питанням формалізації та розв'язання задач на нечітких множинах присвячено багато робіт, наприклад [5 – 7], однак у цих роботах не застосовується таке поняття, як «нечіткий комбінаторний об'єкт». У загальному випадку ЗКО на нечітких множинах можна формалізувати як кортеж $\left\langle f, \mathbf{\Sigma}, D, ext \right\rangle$, де $\mathbf{\Sigma}$ – комбінаторний простір нечітких комбінаторних об'єктів або простір розв'язків задачі,

$D \subseteq \mathbf{\Sigma}$ – підмножина допустимих варіантів розв'язків, $f : \mathbf{\Sigma} \to R^1$ – цільова функція задачі, R^1 – числова пряма, $ext \in \{\max, \min\}$.

Висновки. Запропоновано підхід до формалізації поняття «нечіткий комбінаторний об'єкт», що дозволяє формалізувати як відомі, так і нові класи нечітких задач комбінаторної оптимізації.

Л.Ф. Гуляницкий, И.И. Рясная

К ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

Предложен подход к формализации понятия «нечеткий комбинаторный объект», что позволяет формализовать как известные, так и новые классы задач комбинаторной оптимизации на нечетких множествах. Проведена классификация нечетких комбинаторных объектов, а также приведены примеры таких нечетких комбинаторных объектов, как нечеткие размещения, нечеткие сочетания, нечеткие перестановки, нечеткие графы.

L.F. Hulianytskyi, I.I. Riasna

ON FORMALIZATION OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS
ON FUZZY SETS

The article considers an approach to formalizing the concept "fuzzy combinatorial object" that allows to formalize both known, and new classes of problems of combinatorial optimization on fuzzy sets. We classify fuzzy combinatorial objects. Examples of such fuzzy combinatorial objects as fuzzy arrangements, fuzzy combinations, fuzzy permutations, and fuzzy graphs are given.

1. *Гуляницький Л.Ф.* До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 45 – 49.
2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. *Нечеткие* множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
4. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 384 с.
5. *Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф.* Размытый алгоритм метода вектора спада для решения оптимизационных задач на выборках // Компьютерная математика. – 2009. – Вып. 1. – С. 152 – 163.
6. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій. – К.: Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.
7. *Yamakami T.* The World of Combinatorial Fuzzy Problems and the Efficiency of Fuzzy Approximation Algorithms // Proceedings of the 15th International Symposium on Advanced Intelligent Systems (ISIS 2014), December 3 – 6, 2014, IEEE, 2014. – P. 29 – 35.

Одержано 25.01.2016