УДК 519.8

Г.П. ДОНЕЦЬ, В.І. БІЛЕЦЬКИЙ, Е.І. НЕНАХОВ

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ПОШУКУ ТРЬОХ ТА ЧОТИРЬОХ АКТИВНИХ КУЛЬ НА МНОЖИНІ ЗАДАНИХ

Розглядаються задачі пошуку трьох та чотирьох активних куль на множині заданих. Описуються деякі результати знаходження активних куль за мінімальну кількість випробовувань на основі стратегії послідовних цілеспрямованих покрокових дій.

© Г.П. Донець, В.І. Білецький, Е.І. Ненахов, 2017

Вступ. Задача пошуку трьох та чотирьох активних куль значно складніша від задачі пошуку двох активних куль*, але для свого розв'язання вона повністю використовує досягнення останньої. За аналогією з нею введемо наступні позначення: $f_3(n)$, $f_4(n)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед n заданих; $h_3(k^+, n-k)$, $h_4(k^+, n-k)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед n заданих після того, як перевірка k куль дала позитивний результат.

Якщо з n куль активні три, то є $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ варіантів різних активних трійок. Тому, якщо $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} > 2^s$, то за s випробувань не вдасться знайти активну трійку.

Якщо з n куль на першому кроці випробовуємо k куль, то результат випробування «–» відповідає C_{n-k}^3 варіантів (три активні кулі перебувають серед $n-k$, що залишилися), а результат «+» – іншим $C_n^3 - C_{n-k}^3$ варіантам.

* *Билецкий В.И., Ненахов Э.И.* Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. С. 78 – 86.

Якщо в розпорядженні залишилося тільки i випробувань, то обов’язково має бути $C_{n-k}^{3} \le 2^{i}$ і $C_{n}^{3} - C_{n-k}^{3} \le 2^{i}$.

Для обчислення функцій $f_3(n)$ та $f_4(n)$ використовуються деякі результати обчислень функції $f_2(n)^{*}$, а кращою стратегією є індуктивний метод, коли загальна задача з даною кількістю активних куль зводиться до задачі з меншою кількістю активних куль.

1. Обчислення функції $f_3(n)$.

Для $4 \le n \le 9$ безпосередньо переконуємося, що $f_3(n) = n - 1$. Очевидно, що $h_3(2^{+}, k) = 1 + f_2(k+1)$. Приведемо деякі результати оптимальних обчислень функції $f_3(n)$ для значень $n > 9$.

Нехай $n = 10$. Покажемо, що $f_3(10) = 8$. На першому кроці випробовуємо дві кулі < 2 > . Якщо отримаємо результат «–», то тоді маємо $f_3(8) = 7$, а якщо результат випробовування буде «+», то тоді отримаємо $h_3(2^{+}, 8) = 1 + f_2(9) = 7$. В обох випадках отримаємо $f_3(10) = 8$.

Для 11 куль уже недостатньо 8 випробувань, але легко довести, що $f_3(11) = 9$. Для цього беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат випробовування «–», то тоді $f_3(10) = 8$, а якщо результат буде «+», то тоді* $f_2(10) = 6$. Сумуючи обидва випадки, маємо $f_3(11) = 9$.

Виявляється, що також $f_3(12) = f_3(13) = 9$.

Досить легко показати, що три активні кулі з 12-и можна знайти за 9 випробувань, тобто довести, що $f_3(12) = 9$. Для цього на першому кроці візьмемо дві кулі. Якщо отримаємо результат «–», то $f_3(10) = 8$, а якщо буде «+», то справедлива рівність $h_3(2^{+}, 10) = 1 + f_2(11) = 1 + 7 = 8$. В підсумку отримаємо рівність $f_3(12) = 9$.

Покажемо, що три активні кулі з 13-и можна знайти за 9 випробувань. Для цього на першому кроці для перевірки беремо три кулі. Якщо отримаємо результат «–», то тоді $f_3(10) = 8$, і в сумі отримаємо 9 випробовувань.

Якщо на першому кроці отримаємо результат «+», то приходимо до функції $h_3(3^{+}, 10)$. Доведемо, що $h_3(3^{+}, 10) = 8$. Для цього на другому кроці беремо наступні чотири кулі. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій та четвертий кроки серед них знайдемо одну активну кулю, що приведе до функції $h_2(3^{+}, 9)$. Це означає, що за наступні п’ять кроків ($h_2(3^{+}, 9) = 5$) знайдемо ще дві активні кулі.

Якщо на другому кроці отримаємо результат «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^{+}, 6)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки дві кулі з шести. Якщо отримаємо результат «+», то тоді на четвертому кроці знайдемо серед них одну активну і, таким чином, прийдемо до функції $h_2(3^{+}, 5)$, а $h_2(3^{+}, 5) = 5$.

Якщо результат перевірки двох куль із шести «–», то приходимо до функції $h_3(3^+, 4)$, яку можна прирівняти до функції $f_3(7)$, що, як відомо, $f_3(7) = 6$. В усіх розглянутих випадках отримаємо, що $f_3(13) = 9$.

Для 14 куль 9 випробувань уже не достатньо. Доведемо, що $f_3(14) = 10$.

Для цього беремо для перевірки одну кулю. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді дві активні кулі серед 13-и легко знаходяться за $f_2(13) = 7$ випробовувань.

У обох випадках отримаємо результат $f_3(14) = 10$.

Виявляється, що також $f_3(15) = f_3(16) = 10$.

Доведемо це для $n = 16$. Для 16 куль на першому кроці для перевірки беремо три кулі. Якщо отримаємо результат «–», то $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді на другому кроці беремо наступні чотири кулі. Якщо результат буде «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них одну активну, що приведе до функції $h_2(3^+, 12)$, а, як відомо, $h_2(3^+, 12) = 6$.

Якщо результат другого кроку буде «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 9)$, яка покривається функцією $h_3(3^+, 10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+, 10) = 8$. В усіх варіантах отримуємо, що $f_3(16) = 10$.

Покажемо, що $f_3(17) = f_3(18) = f_3(19) = f_3(20) = 11$.

Для 17 куль 10 випробувань уже недостатньо. Легко довести, що для 17-и куль $f_3(17) = 11$. Для цього беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат «–», то тоді $f_3(16) = 10$, а якщо результат буде «+», то тоді дві активні кулі з 16 отримаємо за $f_2(16) = 8$ випробовувань. В обох випадках у сумі отримаємо, що $f_3(17) = 11$.

Досить легко отримати число випробовувань для знаходження трьох активних куль серед 18-и та показати, що $f_3(18) =11$. Для цього на першому кроці для перевірки візьмемо дві кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді три активні кулі знайдемо за $f_3(16) = 10$ випробовувань, а якщо отримаємо результат «+», то справедливе співвідношення $h_3(2^+, 16) = 1 + f_2(17) = 9$. У підсумку отримаємо, що $f_3(18) = 11$.

Покажемо, що і серед 19-и куль три активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(19) = 11$. Для цього на першому кроці беремо три кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(16) = 10$, і в сумі отримаємо 11 перевірок.

А якщо результат перевірки на першому кроці буде «+», то приходимо до функції $h_3(3^+, 16)$. Доведемо, що $h_3(3^+, 16) = 10$. Для цього на другому кроці беремо наступні чотири кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них хоча б одну активну, що приводить до функції $h_2(3^+, 15)$. Дві інші активні кулі отримаємо за $h_2(3^+, 15) = 9$ перевірок. В сумі отримаємо 11 перевірок.

Якщо на другому кроці отримаємо результат «–», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 12)$. Далі поступаємо таким чином.

На третьому кроці беремо для перевірки чотири кулі з 12-ти. Якщо отримаємо результат «+», то на четвертому та п’ятому кроках знаходимо одну з них активну. Дві інші активні кулі отримаємо за $h_2(3^+, 11) = 6$ перевірок. В сумі отримаємо 11 перевірок.

Якщо на третьому кроці отримаємо результат «–», то приходимо до функції $h_3(3^+, 8)$, яка покривається функцією $h_3(3^+, 10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+, 10) = 8$. В усіх розглянутих випадках отримаємо, що $f_3(19) = 11$.

Покажемо, що і серед 20-и куль три активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(20) = 11$.

Для цього на першому кроці з 20-и беремо для випробовування чотири кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то три активні кулі можна отримати за $f_3(16) = 10$ перевірок. Якщо результат перевірки чотирьох куль буде «+», то тоді на другому кроці беремо сім наступних куль. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то три активні кулі можна отримати за $f_3(13) = 9$ перевірок. Якщо результат перевірки семи куль буде «+», то за третій і четвертий кроки з чотирьох куль отримаємо одну активну і прийдемо до функції $h_2(7^+, 12)$. І тоді дві інші активні кулі отримаємо за $h_2(7^+, 12) = 7$ перевірок. В сумі отримаємо 11 перевірок, а це означає, що $f_3(20) = 11$.

Таким же чином можна встановити, що $f_3(20 + к) = 12$ для $1 \le k \le 4$. Це досягається наступним шляхом. На першому кроці перевіряємо k куль. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(20) = 11$, а якщо результат буде «+», то за другий і третій кроки отримаємо з k куль одну активну і з решти дві активні кулі отримаємо за $f_2(20 + k - 1) \le 9$ кроків, що і приводить до шуканого результату.

Легко показати, що $f_3(25) = 12$. Для цього на першому кроці беремо п'ять куль. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_3(20) = 11$. А якщо результат перевірки буде «+», то на другому кроці беремо для перевірки вісім наступних куль. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій, четвертий і п'ятий кроки знаходимо серед них одну активну кулю. Така ситуація приводить до функції $h_2(5^+, 19)$. А це означає, що дві інші активні кулі можна знайти за $h_2(5^+, 19) = 7$ кроків.

Якщо результат перевірки восьми куль буде «–», то тоді приходимо до функції $h_3(5^+, 12)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки одну кулю з п'яти. Якщо отримаємо результат «+», то дві активні кулі знайдемо за вісім кроків з решти 16-и. А якщо результат перевірки однієї кулі з п'яти буде «–», то за четвертий і п'ятий кроки знаходимо серед чотирьох одну активну, а дві інші активні кулі можна знайти серед 15-и (12 + 3) останніх за $f_2(15) = 7$ випробовувань. А всього буде 12 перевірок.

2. Обчислення функції $f_4(n)$.

Для чотирьох куль застосовуємо ті ж самі прийоми. Безпосередньо переконуємося, що $f_4(n) = n - 1$ для $5 \le n \le 12$. Очевидно, що (за аналогією п. 1) $h_4(2^+, k) = 1 + f_3(k+1)$.

Переконаємось, що для 13 куль $f_4(13) = 11$. Для цього здійснюємо перше випробування, взявши для перевірки дві кулі. Якщо результат перевірки отримаємо «–», то тоді залишається 11 куль, і $f_4(11) = 10$. А якщо результат перевірки отримаємо «+», то тоді $h_4(2^+, 11) = 1 + f_3(12) = 10$.

В обох випадках маємо, що $f_4(13) = 11$.

Для 14 куль не вистачає 11 випробувань, а 12 достатньо. Це легко отримати, якщо для перевірки на першому кроці взяти одну кулю. Якщо отримаємо результат перевірки «–», то тоді $f_4(13) = 11$, а якщо буде «+», то $f_3(13) = 9$, що і потрібно.

Для 15 куль також справедливо $f_4(15) = 12$, що доводиться наступним шляхом. На першому кроці візьмемо для перевірки три кулі. Якщо результат перевірки «–», то тоді $h_4(12) = 11$. І всього отримаємо 12 перевірок.

Якщо результат перевірки трьох куль «+», то приходимо до функції $h_4(3^+, 12)$.

На другому кроці беремо дві наступні кулі з 12-и та перевіряємо їх. Якщо отримаємо результат «+», то на третьому кроці знаходимо серед них одну активну, що приведе до функції $h_3(3^+, 11)$, що після визначення другої активної кулі серед трьох приведе до функції $f_2(13)$, а це означає, що дві активні кулі серед 13-и можна визначити за $f_2(13) = 7$ кроків. В сумі буде 12 кроків.

Якщо результат перевірки двох куль буде «–», то прийдемо до функції $h_4(3^+, 10)$. Знову повторюємо прийом з двома наступними кулями (назвемо його ескалацією), що завжди приводить до двох результатів. При позитивному результаті прийдемо до функції з пошуком активних куль на одиницю менше.

При негативному результаті число активних куль, які потрібно знайти у подальшому, не зменшується, зменшується тільки на дві одиниці загальна кількість куль для подальшого пошуку.

У нашому випадку при позитивному результаті приходимо до функції $h_3(3^+, 9) \le h_3(3^+, 10) = 8$, як було доведено раніше.

При негативному результаті прийдемо до функції $h_4(3^+, 8)$. Знову застосовуємо прийом ескалації, внаслідок якого при негативному результаті приходимо до функції $h_4(3^+, 6)$, яка обчислюється безпосередньо ($h_4(3^+, 6) = 8$), та функції $h_3(3^+, 7)$ – при позитивному результаті, до якої знову застосовуємо прийом ескалації. В разі позитивного результату приходимо до функції $h_2(3^+, 6)$, для якої відомо, що $h_2(3^+, 6) = 5$, та функції $h_3(3^+, 5)$ – при позитивному результаті, до якої знову застосовуємо прийом ескалації.

Внаслідок застосування прийому отримаємо функції $h_3(3^+, 3)$, яка обчислюється безпосередньо ($h_3(3^+, 3) = 5$), або функції $h_2(3^+, 4)$, для якої відомо, що $h_2(3^+, 4) = 4$, чим і завершується доведення.

Для 16 куль уже необхідно 13 випробувань, хоча кількість варіантів $m = C_{16}^4 = 1820$, що значно менше, ніж 2^{13}. Далі при збільшенні кількості куль цей розрив ще збільшується.

Вчасно застосовуючи прийом ескалації, можна отримати наступні результати: $f_4(16) = f_4(17) = f_4(18) = 13$.

Г.А. Донец, В.И. Билецкий, Э.И. Ненахов

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПОИСКА ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ АКТИВНЫХ ШАРОВ НА МНОЖЕСТВЕ ЗАДАННЫХ

Рассматриваются задачи поиска трех и четырех активных шаров на множестве заданных. Описываются некоторые результаты нахождения активных шаров за минимальное количество испытаний на основании стратегии последовательных целенаправленых пошаговых действий.

G.P. Donets, V.I. Biletsky, E.I. Nenakhov

SOME RESULTS OF SEARCHING THREE OR FOUR ACTIVE BALLS ON A GIVEN SET

Problems of searching three or four active balls among a set of similar ones are considered. Some results of finding active balls in minimal number of trials based on the strategy of consequent purposeful steps are described.

Одержано 08.04.2017