УДК 517.977

Г.Ц. ЧИКРІЙ

ПРО ПОЗИЦІЙНЕ КЕРУВАННЯ В ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГРІ З ЗАПІЗНЕННЯМ ІНФОРМАЦІЇ

Розглядається інтегро-диференціальна гра з запізненням інформації, в якій виконані умови регулярності за М.М. Красовським. Встановлені достатні умови збли-ження з ε*-околом нуля за час пер-шого поглинання, який знайдений в явному вигляді.*

Вступ. Класичним прикладом ефективного застосування правила екстремального прицілювання М.М. Красовського [1, 2] є ситуація з єдиними екстремальними елементами відповідних маргінальних відображень, так званий регулярний випадок. У даній роботі цей факт ілюструється на прикладі інтегро-диференціальної гри з запізненням інформації.

Розглянемо задачу зближення, в якій рух об'єкта описується системою інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{z}(t)=\int_0^t z(s)\,ds+u(t)-v(t)+$$

$$+\int_0^t \big(u(s)-v(s)\big)ds,$$

$$z(t)\in R^n, z(0)=z_0,\ t\ge 0, \qquad (1)$$

яка включає крім звичайного ще й інтегральний блок керування.

Мета переслідувача – ε-зближення траєкторії об'єкта з термінальною множиною M^*, де

$$M^*=\{z:\|z\|\le\varepsilon\}. \qquad (2)$$

Області керувань U та V є кулями

$$U=\{u, u\in R^n,\ \|u\|\le\rho\},$$

$$V=\{v, v\in R^n,\ \|v\|\le\sigma\},\quad \rho>0,\ \sigma>0.$$

В роботі [3] знайдена формула для розв'язку системи (1)

$$z(t)=ch(t)z_0+\int_0^t e^{t-s}\big(u(s)-v(s)\big)ds, t\ge 0, \qquad (3)$$

де cht – гіперболічний косинус: $cht=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.

Будемо вважати, що переслідувач отримує інформацію про стан об'єкта з постійним запізненням у часі τ. Припустимо, що на початку гри переслідувач застосовує керування $u(t)\equiv 0,\ \ t\in[0,\tau)$.

Як відомо (див., наприклад, [4]), гра з постійним запізненням інформації еквівалентна грі переслідування з повною інформацією, в якій поточний стан об'єкта описується системою

$$\tilde{z}(t) = chtz_0 + \int_{\tau}^{t} e^{(t-s)}\left(u(s) - e^{\tau}v(s-\tau)\right)ds,\ \ t\geq\tau, \tag{4}$$

з термінальною множиною

$$M(\tau) = \varepsilon S \underline{*} V(\tau),\quad V(\tau) = \int_0^{\tau} e^{s} V\, ds = \sigma(e^{\tau}-1)S. \tag{5}$$

З огляду на те, що εS та $V(\tau)$ є кульками відповідно радіусів ε та $\sigma(e^{\tau}-1)$ з центром у нулі, то умова

$$M(\tau) = \left[\varepsilon - \sigma(e^{\tau}-1)\right]S \neq \varnothing$$

виконується, якщо

$$\varepsilon \geq \sigma(e^{\tau}-1). \tag{6}$$

Опорна функція множини $M(\tau)$ має вигляд

$$W\left(M(\tau);\ p\right) = \left(\varepsilon - \sigma(e^{\tau}-1)\right)\|p\|$$

і, оскільки множина $M(\tau)$ – обмежена, то бар'єрний конус $K_{M(\tau)} = R^n$ [2].

Припустимо, що переслідувач, починаючи з моменту часу τ, використовує позиційні керування. Застосуємо схему, викладену в [3], для розв'язку задачі зближення в еквівалентній грі (4), (5). Згідно схемі позиційного керування покладемо

$$\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right) = chT\, z_0 + \int_{\tau}^{t} e^{(T-s)}\left(u(s) - e^{\tau}v(s-\tau)\right)ds, \tag{7}$$

де $u_t(\cdot), v_{t-\tau}(\cdot)$ – реалізації керувань гравців відповідно на півінтервалах $[\tau,t)$, $[0,t-\tau)$. Позначимо $\zeta = \tilde{z}\left(T,\,t,\,u_t(\cdot),\,v_{t-\tau}(\cdot)\right)$.

Зауважимо, що оскільки в представленні циліндричної термінальної множини $M^* = M_0 + \varepsilon S,\ \ M_0 = \{0\}$, то $M_0{}^{\perp} = L = R^n$ і ортопроектор $\pi,\ \pi: R^n \to L,$ задається одиничною матрицею E.

Згідно правила екстремального прицілювання [2] та враховуючи вигляд множин U та V введемо функцію

$$W(T,t,\zeta;p) = (\zeta,p) + \int_t^T e^{(T-s)} \min_{v\in V}\max_{u\in U}(p, u - e^{\tau}v)\,ds =$$
$$= (\zeta,p) + (\rho - \sigma e^{\tau})\,(e^{T-t}-1)\,\|p\|,\ \ t\geq\tau,$$

де максимум і мінімум досягається відповідно на векторах

$$u = \rho\frac{p}{\|p\|},\quad v = \sigma\frac{p}{\|p\|}.$$

Підставивши формули для $W(T,t,\zeta;p)$ та $W_{M(\tau)}(p)$ у вираз для відстані до термінальної множини

$$\lambda(T,t,\zeta)=\min_{\|p\|=1,\,p\in L}\left[W(T,t,\zeta;\,p)+C(M;-p)\right],$$

отримаємо

$$\lambda\left(T,t,\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)\right)=$$
$$=\min_{p\in L,\|p\|=1}\left[\left(\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right),p\right)+\left((\rho-\sigma e^{\tau})(e^{T-t}-1)+\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1)\right)\|p\|\right]=$$
$$=-\left\|\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)\right\|+(\rho-\sigma e^{\tau})(e^{T-t}-1)+\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1),\ t>\tau,$$

причому мінімум досягається на єдиному векторі

$$p=\frac{\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)}{\left\|\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)\right\|},$$

де $\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)$ визначається формулою (7). Це означає, що виконано умову, що полягає в єдиності вектора спряженої системи [2].

Позначимо

$$T\left(t,u_t(\cdot),v_t(\cdot)\right)=\min\left\{T\geq t:\lambda\left(T,t,\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_t(\cdot)\right)\right)=0\right\}.$$

Час $T\left(t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)$ – перший позитивний корень відносно T рівняння

$$\left\|\tilde{z}\left(T,t,u_t(\cdot),v_{t-\tau}(\cdot)\right)\right\|=(\rho-\sigma e^{\tau})\ (e^{T-t}-1)+\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1),\,T\geq t>\tau,$$

а час першого поглинання – перший позитивний корень рівняння

$$(\rho-\sigma e^{\tau})\ (e^{T-\tau}-1)+\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1)=chT\,\|z_0\|,\,T>\tau. \tag{8}$$

Функція $chT=\dfrac{e^{T}+e^{-T}}{2}$ – монотонно зростаюча при $T>0$ і $ch0=1$.

Дослідимо рівняння (8) на предмет існування позитивного кореня. Нехай виконано умову

$$\rho-e^{\tau}\sigma>0. \tag{9}$$

Тоді, з огляду на умову (6), позитивність лівої частини рівності (8) гарантовано. Перепишемо (8), позначивши

$$\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1)=\alpha,\ \ (\rho-e^{\tau}\sigma)=\beta. \tag{10}$$

Тоді рівняння (8) набуде вигляду

$$\alpha+\beta\,(e^{T-\tau}-1)=\frac{e^{T}+e^{-T}}{2}\|z_0\|, \tag{11}$$

де $\alpha\geq 0,\beta>0\ \ \forall\tau>0.$ Помножимо обидві частини рівняння (11) на $\dfrac{e^{T+\tau}}{\beta}$ і запишемо його у вигляді

$$\left(1-\frac{e^{\tau}\|z_0\|}{2\beta}\right)e^{2T}-e^{T+\tau}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{e^{\tau}\|z_0\|}{2\beta}=0,\ \ T>\tau.$$

Позначивши

$$\frac{e^{\tau}\|z_0\|}{2\beta}=a,\quad e^{\tau}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)=b, \tag{12}$$

отримаємо рівняння

$$(1-a)e^{2T}-be^{T}-a=0. \tag{13}$$

Введемо змінну $e^{T}=x$ і будемо шукати розв'язки квадратного рівняння

$$(1-a)x^2-bx-a=0, \tag{14}$$

які більші за e^{τ}, $e^{T}=x>e^{\tau}$ при $T>\tau$.

Будемо розглядати випадок, коли $a<1,\ b>0$. Згідно позначень (10), (12)

$$b=e^{\tau}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)=e^{\tau}\frac{(\rho-e^{\tau}\sigma)-\left(\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1)\right)}{\rho-e^{\tau}\sigma}=e^{\tau}\frac{\rho-\sigma-\varepsilon}{\rho-e^{\tau}\sigma},$$

тому, оскільки $e^{\tau}>1\ \ \forall\tau>0$ і $\rho>e^{\tau}\sigma$ (9), умова $b>0$ виконується якщо

$$\varepsilon\le\rho-\sigma. \tag{15}$$

Оскільки ε – позитивне число, виконання цієї умови потребує переваги в ресурсах керування

$$\rho>\sigma. \tag{16}$$

Ця нерівність випливає з умови (9). Легко перевірити, що в нашому випадку виконання умов (6), (15) автоматично забезпечує виконання умови (9).

Розв'язки рівняння (14) мають вигляд

$$x_1=\frac{b}{2(1-a)}+\frac{\sqrt{b^2+4a(1-a)}}{2(1-a)},\quad x_2=\frac{b}{2(1-a)}-\frac{\sqrt{b^2+4a(1-a)}}{2(1-a)}.$$

Оскільки $0<a<1,\ b>0,$ то $\dfrac{b+\sqrt{b^2+4(1-a)a}}{2(1-a)}>\dfrac{b}{2(1-a)},$ а значить $x_2<0$.

Тому рівняння (14) має єдиний позитивний корень

$$x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4(1-a)a}}{2(1-a)},\qquad x_1>\frac{b}{1-a}>0.$$

Цей корень гарантовано більший за e^{τ}, якщо $\dfrac{b}{1-a}>e^{\tau}$ або $a>1-be^{-\tau}$.

З огляду на вираз для b (12) $1-be^{-\tau}=\alpha/\beta,$ тому остання нерівність разом з умовою $a<1$ зводиться до подвійної нерівності $\alpha/\beta<a<1.$ З урахуванням позначень (10), (12), отримана умова набуває вигляду

$$\frac{\varepsilon-\sigma(e^{\tau}-1)}{\rho-e^{\tau}\sigma}<\frac{\|z_0\|}{2e^{-\tau}(\rho-e^{\tau}\sigma)}<1. \tag{17}$$

Таким чином, якщо початкове положення z_0 задовольняє обмеженням (17), то рівняння (14) має єдиний корінь $x_1 > e^{\tau}$. З цього робимо висновок, що у випадку, що розглядається, рівняння (8) має єдиний корінь $T, T > \tau$,

$$T = \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 4(1-a)a}}{2(1-a)}, \qquad (18)$$

де згідно (10), (12)

$$a = \frac{e^{\tau}}{2(\rho - e^{\tau}\sigma)} \| z_0 \|, \quad b = \frac{e^{\tau}(\rho - \sigma - \varepsilon)}{(\rho - e^{\tau}\sigma)}.$$

Отже, показано, що час першого поглинання є скінченним, а також виконана умова регулярності, яка полягає у єдиності екстремальних векторів u та p. При цьому єдиність p означає єдиність точки екстремального прицілювання, а єдиність вектора u забезпечує єдиність траєкторії переслідувача, що веде в цю точку.

На закінчення зауважимо, що якщо параметри гри (1), (2) з постійним запізненням інформації τ задовольняють умовам (6), (15), то з початкових положень z_0, що задовольняють умові (17), зближення в класі позиційних керувань може бути закінчено не пізніше моменту часу T (18).

Висновки. Таким чином, розглянуто лінійну інтегро-диференціальну гру з інтегральним блоком керування, кульовими областями керувань та термінальною множиною. Для даної ігрової задачі має регулярний за М.М. Красовським випадок, тобто екстремальні елементи спряженої системи є єдиними, що забезпечує їх неперервність по позиції.

Отримано достатні умови завершення гри за час першого поглинання, виражені через параметри конфліктно-керованого процесу. В явному вигляді знайдено керування переслідувача та відповідний час першого поглинання, що залежать від початкових умов та параметрів процесу.

Г.Ц. Чикрий

О ПОЗИЦИОННОМ УПРАВЛЕНИИ В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ

Рассматривается интегро-дифференциальная игра с запаздыванием информации, в которой выполнены условия регулярности по Н.Н. Красовскому. Установлены достаточные условия сближения с ε-окрестностью нуля за время первого поглощения, которое найдено в явном виде.

G.Ts. Chikrii

ON POSITIONAL CONROL IN INTEGRO-DIFFERENTIAL GAME WITH DELAY OF INFORMATION

We consider the integro-differential game with delay of information for which the regularity conditions of M.M. Krasovskii are satisfied. Sufficient conditions for approaching the ε-neighbourhood of zero in first-absorption time, the latter found in explicit form, are established.

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Пшеничный Б.Н.* Линейные дифференциальные игры. *Автоматика и телемеханика*. 1968. № 1. С. 65 – 78.
3. *Чикрий Г.Ц.* О позиционном управлении в интегро-дифференциальных играх. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 5. С. 100 – 117.
4. *Чикрий Г.Ц.* Принцип растяжения времени в эволюционных играх сближения. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 35 – 48.

Одержано 20.03.2017