УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНТЕГРАНТОВ

Установлены минимальные условия регулярности интегрантов для существования интегральных функционалов. Показана возможность регуляризации интегрантов при сохранении экстремального значения интегральных функционалов.

Для любого замкнутого множества Ω евклидового пространства R^l обозначим L – множество всех его измеримых по Лебегу подмножеств [1, 2]. Пусть μ – мера Лебега на измеримом пространстве (Ω, L), а $f(\omega, x)$ – функция на $\Omega\times\mathsf{R}^l$ со значениями в расширенной вещественной прямой. Следуя [3], любую такую функцию будем называть интегрантом. При довольно слабых предположениях регулярности интегрантов, описанных далее, интеграл

$$I_f(x(\cdot)) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega))\,\mu(d\omega) \qquad (1)$$

оказывается корректно определенным для каждой суммируемой функции $x:\Omega\to\mathsf{R}^l$ и, таким образом, является функционалом на банаховом пространстве $L^1(\Omega,\mathsf{R}^l)$ со значениями в расширенной вещественной прямой. Такие функционалы возникают во многих проблемах теории управления и в теории динамических игр [3, 4]. При этом часто бывает желательно минимизировать выражение вида I_f (1) на подмножестве $L^1(\Omega,\mathsf{R}^l)$, определяемом некоторыми ограничениями (геометрические, интегральные, смешанные). Другие ограничения можно выразить с помощью самого I_f, приписывая интегранту $f(\omega, v)$, значение $+\infty$ в определенных точках $\Omega\times\mathsf{R}^l$. Интеграл (1) не имеет смысла, если не сделать дополнительных предположений. Следующие условия, которые всюду далее предпологаются выполненными, оказываются вполне естественными.

Данная работа развивает идеи [5, 6], примыкает к исследованиям [3] и указывает новые возможности приложения выпуклого анализа и теории многозначных отображений к теории конфликтно-управляемых процессов.

Пусть $\mathcal{B}\left(\mathrm{R}^{n}\right)$ – σ-алгебра борелевских множеств пространства R^{l}.

Обозначим $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$ σ-алгебру, порожденную произведением множеств $L\times B$, где $L\in\mathcal{L}$, $B\in\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-измеримыми (более точно $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримыми).

Вектор-функцию $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathrm{R}^{l}\to\mathrm{R}^{m}$, будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримой, если для любого борелевского множества $B\in\mathcal{B}(\mathrm{R}^{m})$ его обратный образ $f^{-1}(B)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^{l}:\ f(\omega,x)\in B\right\}$ будет $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримым.

Условия регулярности. Интегрант $f(\omega,x)$ является $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримой функцией и полунепрерывной сверху как функция $x\in R^{1}$ для каждого $\omega\in\Omega$.

Многозначное отображение $F(\omega,x), F:\Omega\times\mathrm{R}^{l}\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, будем называть $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримым, если для любого открытого множества $A\subset\mathrm{R}^{m}$ его обратный образ $F^{-1}(A)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathrm{R}^{l}:\ F(\omega,x)\cap A\neq\varnothing\right\}$ будет $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{l})$-измеримым.

Каждому многозначному отображению $F(\omega,x), F:\Omega\times\mathrm{R}^{l}\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, можно сопоставить его график $\operatorname{gr}F=\left\{(\omega,x,z)\in\Omega\times\mathrm{R}^{l}\times\mathrm{R}^{m}:\ z\in F(\omega,x)\right\}$.

Обозначим $\operatorname{epi}f(\omega,x)=\{(\omega,\alpha)\in\Omega\times R^{1}:\ f(\omega,x)\leq\alpha\}$ надграфик функции $f(\omega,x)$ [3]. Функция $\overline{\operatorname{co}}f(\omega,x)$ называется замыканием овыпуклания функции $f(\omega,x)$, если $\operatorname{epi}\overline{\operatorname{co}}f(\omega,x)=\overline{\operatorname{co}}\operatorname{epi}f(\omega,x)$ [3]. При этом справедливо неравенство $f(\omega,x)\geq\overline{\operatorname{co}}f(\omega,x)$ при всех $\omega\in\Omega$, $x\in R^{1}$.

Лемма 1 [1]. Пусть для многозначного отображения $F(\omega), F:\Omega\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, $\operatorname{gr}F\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{m})$. Тогда для любой $\mathcal{L}$-измеримой вектор-функции $f(\omega)$, $f:\Omega\to\mathrm{R}^{m}$, множество $\left\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)\in F(\omega)\right\}$ будет $\mathcal{L}$-измеримым.

Лемма 2. Пусть многозначное отображение $F_{1}(\omega), F_{1}:\Omega\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, имеет замкнутые значения и $\mathcal{L}$-измеримо, а многозначное отображение $F_{2}(\omega), F_{2}:\Omega\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, имеет открытые значения и $\operatorname{gr}F_{2}\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^{m})$. Тогда отображение $F(\omega)=F_{1}(\omega)\cap F_{2}(\omega), F:\Omega\to 2^{\mathrm{R}^{m}}$, $\mathcal{L}$-измеримо.

Доказательство. С учетом теоремы о характеризации [2], пусть $\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}$ счетное плотное семейство L-измеримых селекторов многозначного отображения $F_1(\omega)$ и при этом $F_1(\omega)=\overline{\bigcup_{i>1} q_i(\omega)}$ для каждого $\omega\in\Omega$. Здесь черта над выражением означает замыкание [2, 3].

Пусть $B\subset \mathsf{R}^m$ произвольное открытое множество. Имеем

$$F^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:\ F_1(\omega)\bigcap F_2(\omega)\bigcap B\neq\varnothing\}=$$
$$=\left\{\omega\in\Omega:\ z\in F_2(\omega)\bigcap B, z\in\overline{\bigcup_{i>1} q_i(\omega)}\right\}=$$
$$=\left\{\omega\in\Omega:\ q(\omega)\in F_2(\omega)\bigcap B, q(\cdot)\in\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}\right\}=$$
$$=\bigcup_{q(\cdot)\in\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}}\{\omega\in\Omega:\ q(\omega)\in F_2(\omega)\bigcap B\}.$$

Но для любого L-измеримого селектора $q(\cdot)\in\{q_i(\cdot)\}_{i\geq 1}$ множество

$$\{\omega\in\Omega:\ q(\omega)\in F_2(\omega)\bigcap B\}=$$
$$=\{\omega\in\Omega:\ q(\omega)\in F_2(\omega)\}\bigcap\{\omega\in\Omega:\ q(\omega)\in B\}.$$

L-измеримо по лемме 1 и из свойства L-измеримости селектора $q(\cdot)$.

Лемма 3. Пусть многозначное отображение $F(\omega), F:\ \Omega\to 2^{\mathsf{R}^l}$, имеет замкнутые значения и L-измеримо, а функция $f(\omega,x), f:\Omega\times\mathsf{R}^l\to\mathsf{R}^1$, $L\otimes\mathcal{B}(\mathsf{R}^l)$-измерима и при каждом $\omega\in\Omega$ полунепрерывна сверху по $x\in\mathsf{R}^l$.

Тогда маргинальная функция $h(\omega)=\inf\limits_{x\in F(\omega)} f(\omega,x), h:\Omega\to\mathsf{R}^1\bigcup\{-\infty\}$, L-измерима. Если к тому же для некоторой L-измеримой конечной действительной функции $\rho(\omega),\rho:\Omega\to\mathsf{R}^1$, почти при всех $\omega\in\Omega$ справедливо условие

$$\rho(\omega)>\inf_{x\in F(\omega)} f(\omega,x), \tag{2}$$

то существует L-измеримый селектор $x(\omega), x:\Omega\to\mathsf{R}^1$, многозначного отображения $F(\omega)$, такой, что почти при всех $\omega\in\Omega$

$$\rho(\omega)>f(\omega,x(\omega)). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon\in R^1$ и $\omega\in\Omega$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\omega)=\{x\in R^l:\ f(\omega,x)<\varepsilon\}$, $G_\varepsilon:\Omega\to 2^{\mathsf{R}^l}$, которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $x\in R^l$ функции $f(\omega,x)$ при любом $\omega\in\Omega$. Нетрудно показать, что при всех $\varepsilon\in R^1$ $h(\omega)<\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $G_\varepsilon(\tau)\bigcap F(\omega)\neq\varnothing$, $\omega\in\Omega$. Поэтому в силу леммы 2 маргинальная функция $h(\omega)=\inf\limits_{x\in F(\omega)} f(\omega,x), h:\Omega\to\mathsf{R}^1\bigcup\{-\infty\}$, L-измерима.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Psi(\omega)=\{x\in F(\omega): f\left(\omega,x\right)<\rho(\omega)\}=F(\omega)\bigcap G_{\rho(\omega)}(\omega)\}.$$

Соотношение (2) гарантирует, что $\Psi(\omega)\neq\varnothing$. Как отмечалось выше, для каждого $\varepsilon\in R^1$ и $\omega\in\Omega$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\omega)=\left\{x\in R^l : f(\omega,x)<\varepsilon\right\}$ имеет открытые значения и график этого отображения будет $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерим, поскольку функция $f(\omega,x)$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима [1]. Поэтому в силу леммы 2 многозначное отображение $\Psi(\omega)$ $\mathcal{L}$-измеримо и существует $\mathcal{L}$-измеримый селектор этого отображения [7] $x(\omega), x:\Omega\to\mathrm{R}^1$, который удовлетворяет неравенству (3).

Теорема 1. Пусть многозначное отображение $F\left(\omega\right), F:\ \Omega\to 2^{\mathrm{R}^l}$, имеет замкнутые значения и $\mathcal{L}$-измеримо, а функция $f(\omega,x), f:\Omega\times\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^1$, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима и при каждом $\omega\in\Omega$ полунепрерывна сверху по $x\in\mathrm{R}^l$.

Тогда маргинальная функция $h(\omega)=\inf\limits_{x\in F(\omega)} f(\omega,x), h:\Omega\to\mathrm{R}^1\bigcup\{-\infty\}$, $\mathcal{L}$-измерима и справедливо равенство

$$H=\int\limits_\Omega h(\omega)\,\mu(d\omega), \tag{3}$$

где $H=\inf\limits_{x(\cdot)\in F(\Omega)}\int\limits_\Omega f\left(\omega,x(\omega)\right)\mu(d\omega)$ и $F(\Omega)$ – множество всех $\mathcal{L}$-измеримых селекторов отображения $F(\omega),\ \ \omega\in\Omega$.

Доказательство. Маргинальная функция $h(\omega)$ $\mathcal{L}$-измерима в силу леммы 3, а функция $f(\omega,x), f:\Omega\times\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^1$, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathrm{R}^l)$-измерима и, следовательно, суперпозиционно измерима [1]. Значит, $f\left(\omega,x(\omega)\right)\geq h(\omega)$, $x(\omega)\in F(\omega),\ \ \omega\in\Omega$.

Покажем справедливость соотношения (3). Ясно, что имеет место неравенство

$$H\geq\int\limits_\Omega h(\omega)\,\mu(d\omega). \tag{4}$$

Пусть в соотношении (4) имеет место строгое неравенство. Тогда существует суммируемая функция $H_0(\omega)$, такая, что

$$H>\int\limits_\Omega H_0(\omega)\,\mu(d\omega) \tag{5}$$

и при почти всех $\omega\in\Omega$ имеем

$$H_0(\omega) > \inf_{x\in F(\omega)} f(\omega, x).$$

Согласно лемме 3 существует $\mathcal{L}$-измеримый селектор $x(\omega), x:\Omega\to \mathrm{R}^1$, многозначного отображения $F(\omega)$, такой, что почти при всех $\omega\in\Omega$

$$H_0(\omega) > f(\omega, x(\omega)) \text{ при почти всех } \omega\in\Omega. \tag{6}$$

Неравенства (5) и (6) дают

$$H > \int_0^t H_0(\tau)d\tau > \int_0^t f(\omega, x(\omega))d\tau \ge H.$$

Полученное притиворечие показывает, что в соотношении (4) имеет место равенство.

Следствие 1. Имеет место равенство

$$H = \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_\Omega \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega).$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\mathrm{co}} f(\omega, x)$ является функцией Каратеодори, то для нее справедливо равенство

$$\int_\Omega \inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x)\mu(d\omega) = \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_\Omega \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega). \tag{7}$$

Действительно, по теореме о маргинальном отображении [2] маргинальная функция $\inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x)$ измерима и соответствующее маргинальное многозначное отображение

$$F_0(\omega) = \{x_0 \in F(\omega) : \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x_0) = \inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x)\}$$

непусто, компактнозначно и измеримо. Пусть $x_0(\cdot)$ – измеримый селектор этого многозначного отображения. Тогда имеем

$$\int_\Omega \inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x)\mu(d\omega) = \int_\Omega \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x_0(\omega)\right)\mu(d\omega) \ge \inf_{x(\cdot)\in F(\Omega)} \int_\Omega \overline{\mathrm{co}} f\left(\omega, x(\omega)\right)\mu(d\omega).$$

В обратную сторону неравенство очевидно, т. е. соотношение (7) справедливо.

Теперь с учетом соотношения $\inf_{x\in F(\omega)} \overline{\mathrm{co}} f(\omega, x) = \inf_{x\in F(\omega)} f(\omega, x)$ равенство (3) дает требуемый результат.

Й.С. Раппопорт

ДО РЕГУЛЯРІЗАЦІЇ ІНТЕГРАНТІВ

Встановлено мінімальні умови регулярності інтегрантів для існування інтегральних функціоналів. Показана можливість регулярізації інтегрантів при збереженні екстремального значення інтегральних функціоналів.

I.S. Rappoport

TO THE REGULARIZATION OF INTEGRANTS

Minimum conditions of reguiar integrants for the existence of integral functionals and the possibility of regularization of integrants while maintaining extreme value of integral functionals is established.

1. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* К теореме об обратном образе для $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-измеримых многозначных отображений. *ДАН Украины*. 2011. № 11. С. 54 – 58.
2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. *Mathematics and Its Applications*. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
3. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. *Chikrii A.A.* Conflict controlled processes. *Springer Science and Business Media*. 2013. 424 p.
5. *Раппопорт И.С.* О регуляризации интегрантов. *Теорія оптимальних рішень*. К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2016. С. 47 – 52.
6. *Раппопорт И.С.* О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 4. С. 90 – 102.
7. *Aumann R.J.* Measurable utility and the measurable choice theorem, La Decision, Actes Coll. Int. du CNRS, Aix-en-Provence. 1967. P. 15 – 26.

Получено 22.03.2017