УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА, Н.В. ГРОМ

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЗОВНІШНІХ РЕСУРСІВ МІЖ ДВОМА КОНКУРУЮЧИМИ ДВОПРОДУКТОВИМИ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ

Створено нові типи моделей двопродуктових систем, що розвиваються, описано їх поведінку дискретними рекурентними співвідношеннями. Розроблено двокритеріальну модель для розв'язання задачі оптимізації розподілу зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими двопродуктовими еволюційними системами.

Вступ. Широкий спектр штучних та природних систем можна представити за допомогою математичних моделей еволюційних систем (ЕС) або систем, що розвиваються (дво-, тричи багатопродуктових) [1 – 3, 6]. Проте у зв'язку з постійним ускладненням задач, що виникають, існуючий апарат моделювання потребує подальшого удосконалення та оновлення. Тому очевидно, що дослідження загальних властивостей та поведінки даних систем є актуальною задачею сьогодення.

Мета статті – на заданому проміжку моделювання знайти такий розподіл зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими двопродуктовими ЕС (ДЕС) при вказаному розподілі внутрішніх та зовнішніх ресурсів між підсистемами, при якому кожна ДЕС досягає максимального результату.

Постановка задачі. ДЕС складається з двох підсистем – підсистеми самовдосконалення A, яка виготовляє продукти I роду, необхідні для функціонування самої системи, та підсистеми виконання головної функції $Б$, що випускає продукти II роду (детальний опис див. у [2 – 4]). В роботі [3] детально описано випадок, коли дві ДЕС взаємодіють пасивно (тобто не обмінюються між собою внутрішніми та кінцевими продуктами) і знайдено оптимальний розподіл зовнішнього ресурсу між ними для отримання максимального виходу кінцевого продукту на заданому проміжку моделювання від обох ДЕС разом.

На відміну від моделі, описаної в [3], в даній роботі досліджується задача оптимізації розподілу зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими двопродуктовими еволюційними системами.

Побудова двокритеріальної оптимізаційної моделі. Рівняння двох конкуруючих ДЕС можна записати таким чином (у вигляді рекурентних співвідношень, які представлені у [3]):

$$m_{ij} = \alpha_i^j m_{i0} \prod_{l=0}^{j-1} y_{il} + \sum_{l=1}^{j} \left(\alpha_i^{j-l} x_{il} z_{il} \prod_{p=l}^{j-1} y_{ip} \right) f, \tag{1}$$

$$c_{ij} = \beta_i \left(1 - y_{i\,j-1}\right) \left(\alpha_i^{j-1} m_{i0} \prod_{l=0}^{j-2} y_{il} + \sum_{l=1}^{j-1} \left(\alpha_i^{j-l-1} x_{il} z_{il} \prod_{p=l}^{j-2} y_{ip} \right) f \right) + k_c \left(1 - x_{ij}\right) z_{ij} f, \tag{2}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, \tag{3}$$

де m_{i0} – задана кількість початкового ресурсу в i-й системі; m_{ij} – кількість продуктів I роду в i-й системі на j-у етапі моделювання; c_{ij} – кількість продуктів II роду в i-й системі на j-у етапі; α_i – ефективність одного продукту I роду в підсистемі A_i; β_i – відповідно, ефективність одного продукту I роду в підсистемі $Б_i$; $y_{i\,j-1}$ – частина внутрішніх продуктів, що використовується в j-й момент моделювання підсистемою A_i; f – кількість зовнішніх ресурсів, що на кожному етапі направляються до обох систем; k_c – коефіцієнт узгодження розмірностей зовнішнього ресурсу та вихідного продукту (f і m_{ij} однієї розмірності); z_{ij} – частина зовнішнього ресурсу, що направляється в i-ту систему на j-у етапі; x_{ij} – частина зовнішнього ресурсу i-ої системи, що направляється в підсистему A_i на j-у етапі; n – кількість етапів моделювання; c_i – кількість продуктів II роду, виготовлених у підсистемі $Б_i$.

Нехай $\prod_{l=j}^{j-1} a_l \equiv 1$, $\sum_{l=j}^{j-1} a_l \equiv 0$, $j \in \{0,...,n\}$, a_l – довільна функція, $i \in \{1,2\}$, $0 \le y_{i\,j-1} \le 1$, $0 \le x_{ij} \le 1$, $0 \le z_{ij} \le 1$.

Для уникнення моделювання неефективних ДЕС накладемо умову:

$$\beta_i > k_c, \ \alpha_i > 1, \ y_{i;\,n-1} \equiv 0. \tag{4}$$

Розроблено двокритеріальну модель оптимізації, що описує дану задачу з урахуванням можливих обмежень, та запропоновано підхід до її розв’язання (встановлення оптимального розподілу зовнішнього ресурсу між двома конкуруючими системами).

Сформулюємо двокритеріальну оптимізаційну задачу.

Задача 1. Для двох ДЕС**,** визначених рівняннями (1) – (4), при заданих α_i, β_i, m_i, f, k_c, $y_i = y_i^{\max} = (1,1,\ldots,1,0)$, $x_i = x_i^{\max} = (1,1,\ldots,1,0)$, $i \in \{1,2\}$, знайти такий оптимальний розподіл зовнішнього ресурсу (тобто, такий вектор $z_i = (z_{i1},\ldots,z_{in})$), щоб $c_i(x_i, y_i, z_i) \to \max$, $i \in \{1,2\}$.

Розв'язання. Зауважимо, що точка $\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}\right)$ задає оптимальний розподіл зовнішніх та внутрішніх ресурсів між підсистемами кожної ДЕС [3]. Підставимо у (3) вказані в задачі 1 умови:

$$c_{ij} = 0,\ j = 1,\ldots,n-1,\ i = 1,2,\ c_{in} = \beta_i\left(\alpha_i^{n-1} m_{i0} + f\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i^{n-j-1} z_{ij}\right) + k_c z_{in} f,$$

$z_{1j} \equiv z_j$, $z_{2j} \equiv 1 - z_j$, $j = 1,\ldots,n$, $z = (z_1,\ldots,z_n)$. Оскільки в даному випадку функції c_i залежні тільки від z, запишемо їх $c_i(z)$. Отримаємо задачу $P(C,Z)$:

$$c_1(z) = \beta_1\left(\alpha_1^{n-1} m_{10} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_1^{n-j-1} z_j f\right) + k_c z_n f, \tag{5}$$

$$c_2(z) = \beta_2\left(\alpha_2^{n-1} m_{20} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_2^{n-j-1}\left(1 - z_j\right) f\right) + k_c\left(1 - z_n\right) f. \tag{6}$$

Неважко бачити, що всі допустимі розв’язки є Парето-оптимальними [5], тобто принцип Парето не дозволяє звузити область пошуку векторів, що обираються. Припустимо, що від особи, що приймає рішення (ОПР), поступила додаткова інформація про те, що один критерій важливіший за інший, тобто, певне збільшення значень більш важливого критерію може супроводжуватися деяким зменшенням значень менш важливого. Існує простий спосіб урахування інформації про відносну важливість критеріїв [7], який полягає у формуванні нового векторного критерію, тобто перерахуванні менш важливого критерію і подальшої побудови множини Парето щодо нового векторного критерію. Отже, на основі інформації про відносну важливість критеріїв здійснюється звуження початкової множини Парето.

Використаємо тут метод послідовних поступок [5] для розв’язання двокритеріальної задачі $P(C,Z)$. Обмежимо знизу одне із значень $c_i(z)$. Таким чином, можемо сформулювати наступну оптимізаційну задачу.

Задача 2. Дано дві ДЕС, визначені рівняннями (1) – (4), умовами, вказаними у задачі 1, та умовою: $c_{i_1}(z) \ge q_1$. Визначити $\max c_{i_2}(z)$.

Розв'язання. Нехай для визначеності $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1}\alpha_{i_1} \ge \beta_{i_2}\alpha_{i_2}$.

Згідно з [3] $\max \sum_{i=1}^{2} c_i$ (максимальна кількість продуктів, виготовлених обома ДЕС за n періодів моделювання) досягається у точці $\left(y_i^{\max}, x_i^{\max}, z^{**}\right)$, де

$$y_i^{\max} = (1,1,\ldots,1,0),\ x_i^{\max} = (1,1,\ldots,1,0),\ z^{**} = \left(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n}\right),$$

$$z_{i_1 j}^{**} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } j = 1,\ldots, j^* - 1, \\ 1, \text{ якщо } j = j^*,\ldots, n-1, \end{cases} \tag{7}$$

j^* – найбільше натуральне число j, для якого виконується нерівність

$$\beta_{i_1} \alpha_{i_1}^{n-j} \ge \beta_{i_2} \alpha_{i_2}^{n-j}. \tag{8}$$

Якщо $q_1 \le \beta_{i_1} \alpha_{i_1}^{n-1} m_{i_1 0} + \sum_{j=j^*}^{n} \beta_{i_1} \alpha_{i_1}^{n-j} f + k_c f$ (стільки продуктів випустить система i_1 при даному z^{**} розподілі зовнішнього ресурсу), то $\max c_{i_2}(z) = c_{i_2}\left(z^{**}\right)$.

Зауважимо, що в даному випадку q_1 повинно бути неймовірно малим, тому на практиці найчастіше зустрічається протилежне:

$$q_1 \gg \beta_{i_1} \alpha_{i_1}^{n-1} m_{i_1 0} + \sum_{j=j^*}^{n} \beta_{i_1} \alpha_{i_1}^{n-j} f + k_c f.$$

Для проведення подальших міркувань доведемо теорему.

Теорема. Якщо функції $c_1(z)$ і $c_2(z)$ задані формулами

$$c_1(z) = \sum_{j=1}^{n} \beta_1 \alpha_1^{n-j} z_j,$$

$$c_2(z) = \sum_{j=1}^{n} \beta_2 \alpha_2^{n-j} \left(1 - z_j\right), \tag{9}$$

$$z = \left(z_1, \ldots, z_n\right),\ 0 \le z_j \le 1,\ 1 < \alpha_1 < \alpha_2,\ \beta_1 < \beta_2,\ c_1(z) \equiv q_1,$$

то $\max c_2(z)$ досягається у точці $z^* = \left(z_1^*; \ldots; z_n^*\right)$,

де

$$z_j^* = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad 1 \le j < k; \\ \dfrac{q_1 - \sum\limits_{j=k+1}^{n} \beta_1 \alpha_1^{n-j}}{\beta_1 \alpha_1^{n-k}}, \quad \text{якщо } j = k, \\ 1, \quad \text{якщо } k < j \le n, \end{cases} \tag{10}$$

k – найбільше натуральне число, для якого виконується нерівність $q_1 \le \sum\limits_{j=k}^{n} \beta_1 \alpha_1^{n-j}$.

Доведення. Обчислимо:

$$c_2(z^*) = \sum_{j=1}^{n-k} \beta_2 \alpha_2^{n-j} + \beta_2 \alpha_2^{n-k} \left(1 - \frac{q_1 - \sum\limits_{j=k+1}^{n} \beta_1 \alpha_1^{n-j}}{\beta_1 \alpha_1^{n-k}} \right).$$

Зменшимо значення довільного z_j ($j > k$): $z_j \to z_j^{'}$. Втрату I системою $\beta_1 \alpha_1^{n-j} \left(1 - z_j^{'}\right)$ кінцевих продуктів компенсуємо збільшенням довільного z_l ($l < k$): $z_l = \alpha_1^{l-j} \left(1 - z_j^{'}\right)$.

Позначимо $c_2(z^*) = N + \beta_2 \alpha_2^{n-l}$,

$$c_2\left(z^{''}\right) = N + \beta_2 \alpha_2^{n-l} \left(1 - \alpha_1^{l-j} \left(1 - z_j^{'}\right)\right) + \beta_2 \alpha_2^{n-j} \left(1 - z_j^{'}\right), \; z^{''} = \left(z_1^{''}; \ldots; z_n^{''}\right),$$

$$z_j^{''} = \begin{cases} z_l, \quad \text{якщо} \quad j = l, \\ z_{j^{'}}, \quad \text{якщо} \quad j = j^{'}, \\ z_j^*, \; \text{інакше}. \end{cases}$$

Легко переконатися, що $c_2\left(z^*\right) > c_2\left(z^{''}\right)$, отже, тільки в точці z^* функція $c_2(z)$ досягає свого оптимуму. Теорему доведено.

Згідно з цією теоремою $\max c_{i_2}(z)$ досягається у точці

$$z^{\max} = \left(z_{i_1 1}^{\max}, \ldots, z_{i_1 n}^{\max}\right),$$

$$z_{i_1 j}^{\max} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 1 \le j < k, \\ z_{k,} \text{ якщо } j = k, \\ 1, \text{ якщо } k < j \le n, \end{cases} \tag{11}$$

де k – найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$q_1 \le \beta_{i_1}\left(\alpha_{i_1}^{n-1} m_{i_1 0} + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{i_1}^{n-j} f\right) + k_c f, \tag{12}$$

$$z_k = \frac{q_1 - \beta_{i_1}\left(\alpha_{i_1}^{n-1} m_{i_1 0} + \sum\limits_{j=k+2}^{n} \alpha_{i_1}^{n-j} f\right) - k_c f}{\beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-(k+1)}}. \tag{13}$$

Таким чином,

$$\max_{c_{i_1} \ge q_1} c_{i_2}(z) = \beta_{i_2}\left(\alpha_{i_2}^{n-1} m_{i_2 0} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_{i_2}^{n-j} f + \alpha_{i_2}^{n-(k+1)}\left(1 - z_k\right) f\right), \tag{14}$$

де k і z_k визначаються формулами (12) – (13).

Нехай $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1}\alpha_{i_1} < \beta_{i_2}\alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} > \beta_{i_2}$. Згідно теореми 4 з [3] та вище доведеної теореми оптимальний розподіл знаходиться у точці $z^{\max}$, що визначається формулою (11) і формула (14) для $\max c_{i_2}(z)$ справедлива для цього випадку. Нехай $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} < \beta_{i_2}$. Згідно вище доведеної теореми оптимальний розподіл також описується формулою (11), тому формула (14) є справедливою для будь-яких випадків.

Оцінимо різницю R між $\max \sum\limits_{i=1}^{2} c_i\left(y_i, x_i, z\right)$ і $q_1 + \max\limits_{c_{i_1} \ge q_1} c_{i_2}\left(y_{i_2}^{\max}, x_{i_2}^{\max}, z\right)$ за умов задачі 1. Із формули (10) та теореми 4 із [3] очевидно, що розподіл зовнішнього ресурсу для двох пасивно взаємодіючих та конкуруючих ДЕС однаковий на етапах з першого по $\left(k-1\right)$-й та з $\left(j^* - 1\right)$-го по $\left(n-1\right)$-й, а відрізняються тільки на етапах з k-го по $\left(j^* - 2\right)$-й (якщо $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} < \beta_{i_2}$, тоді j^* не існує, у цьому випадку розподіл буде однаковим на етапах з першого по $\left(k-1\right)$-й, а починаючи з k-го і до $\left(n-1\right)$-го відрізняється).

Здійснивши елементарні перетворення, отримаємо формулу:

$$R = \max \sum_{i=1}^{2} c_{in} - \left(q_1 + \max_{c_{i_1} \ge q_1} c_{i_2}\left(z_j\right)\right) = z_k\left(\beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-(k+1)} - \beta_{i_2}\alpha_{i_2}^{n-(k+1)}\right) f +$$

$$+ \sum_{j=k}^{j^*-1}\left(\beta_{i_2}\alpha_{i_2}^{n-j} - \beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-j}\right) f, \tag{15}$$

де j^*, k та z_k визначаються формулами (8), (12) та (13) відповідно.

Зауважимо, що у випадку $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$, $\beta_{i_1} < \beta_{i_2}$ в силу не існування етапу j^* дана формула (15) приймає вигляд:

$$R = z_k\left(\beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-(k+1)} - \beta_{i_2}\alpha_{i_2}^{n-(k+1)}\right)f + \sum_{j=k}^{n}\left(\beta_{i_2}\alpha_{i_2}^{n-j} - \beta_{i_1}\alpha_{i_1}^{n-j}\right)f\ . \qquad (16)$$

Отже, конкуруючи, обидві системи випустять разом кінцевого продукту менше на величину R у порівнянні з тією кількістю, яку вони могли б створити при пасивній кооперації.

Висновки. Розроблено двокритеріальну модель для розв'язання задачі оптимізації розподілу зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими двопродуктовими еволюційними системами. Будь-який розподіл зовнішніх ресурсів між двома конкуруючими ДЕС за умов, зазначених у задачі 1 (тобто, коли кожна система поодинці досягає максимального результату), буде Парето-оптималь-ним. Якщо обмежити знизу кількість кінцевих продуктів однієї із ДЕС певним фіксованим числом, то друга ДЕС досягне максимуму у точці, визначеній формулами (7) або (11) – (13). При цьому сумарна кількість кінцевих продуктів, створених обома ДЕС, буде нижчою від максимально можливої на значення, вказане формулою (15) або (16) залежно від випадку.

Н.В. Семенова, Н.В. Гром

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНИХ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ДВУМЯ КОНКУРИРУЮЩИМИ ДВУХПРОДУКТОВЫМИ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Смоделировано поведение двух конкурирующих двухпродуктовых эволюционных систем, разработана двухкритериальная модель для решения задачи оптимизации распределения внешних ресурсов между этими системами, описан метод нахождения оптимального распределения внешнего ресурса между ними.

N.V. Semenova, N.V. Hrom

OPTIMIZATION OF EXTERNAL RESOURCES DISTRIBUTION BETWEEN TWO COMPETITIVE TWO-PRODUCT EVOLUTIONAL SYSTEMS

In article a behavior of two competitive two-product evolutional systems has been simulated, a two-criterion model is developed for the solving of problem of optimiization of distributing of external resource between these systems and describe a method to find an optimal distribution of external resource between them.

Список літератури

1. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
2. Бугерко Н.В., Гирлин. С.К. Об одной задаче кооперативного взаимодействия двухпродуктовых развивающихся систем. *Современные наукоемкие технологии*. 2013. № 6. С. 49 –53.
3. Гром Н.В., Семенова Н.В. Моделювання пасивної взаємодії двох двопродуктових еволюційних систем при зовнішньому впливі. *Компьютерная математика.* 2018. № 1. С. 28 – 35.

4. Гром Н.В., Семенова Н.В. Оптимізація функціонування двопродуктової еволюційної системи в термінах дискретного програмування. VIII Міжнародна школа-семінар: «*Теорія прийняття рішень*». Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016. С. 98 – 99.
5. Семенова НВ., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв’язання. Київ: Наукова думка, 2009. 266 с.
6. Girlin S., Bugerko N. Three Laws of Optimal Development [Електронний ресурс]. *International Journal of Applied and Fundamental Research.* 2014.
   Режим доступу до ресурсу: http://www.science-sd.com/457-24536.
7. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. СПб: Издательство "Ютас", 2007. 104 с.

Одержано 19.03.2018