# Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, Г.О. ШУЛІНОК, С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ

## МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ НА СВІТОВОМУ РИНКУ ПРОДОВОЛЬСТВА

*На прикладі найпростішої моделі взаємозв'язків на світовому ринку продовольчих і непродовольчих продуктів показано, що некооперативна рівновага досягається при максимальних обсягах експорту продовольства.*



**Вступ**. Модель зв'язків (linkage) Програми продовольства і сільського господарства Міжнародного інституту прикладного системного аналізу (Institute for Applied Systems Analysis, IIASA), членом якого є Національна академія наук України, – це економетрична світова модель, що вивчає взаємодію багатьох національних економік на численних сільськогосподарських ринках і виокремленому ринку несільськогосподарських продуктів [1]. Ця модель містить ряд параметрів стратегій, на які можуть впливати національні уряди для поліпшення економічних результатів [2–5]. При заданій цільовій функції для кожної країни цю модель можна вважати стратегічною грою, де гравці – це уряди різних держав. Для дослідження деяких стратегічних питань моделі зв'язків IIASA робота [6] (один з її авторів – Нобелівський лауреат 1994 р.) обмежується двома продуктами – сільськогосподарським і несільськогосподарським та припущенням, що ціль кожного уряду полягає мінімізації своїх витрат на сільськогосподарську політику в короткостроковому періоді. Один з основних нетривіальних висновків роботи [6] – це те, що, при досить загальних умовах для параметрів моделі зв'язків, оптимальною політикою кожної країни є необмежене постачання продовольства. Такий висновок потребує перевірки на складніших моделях з великою кількістю країн та економетрично визначеними умовами для параметрів урядових стратегій [7, 8]. Сучасні моделі взаємозв'язків дозволяють вивчати глобальні взаємозалежності.

У реалістичній моделі кожна країна має свою цільову функцію, залежну від різноманітних цільових змінних [9, 10]. Крім того, попит може визначатися не тільки лінійними системами видатків [9]. Лінійні системи видатків ведуть до зростання виручки окремої країни при збільшенні її виробництва і пропозиції, якщо пропозиція решти країн залишається фіксованою. Однак при збільшенні сумарної пропозиції продовольства всіх країн (світового ринку) їхня сумарна виручка зменшується.

При розробці моделі спочатку вважатимемо, що запаси продовольства відсутні, а внутрішні ціни рівні міжнародним.

У спрощеній моделі зв'язків припускаємо, що уряд обирає загальну внутрішню пропозицію (supply) $s_i$ продовольства (змінні, що стосуються продовольства, позначатимемо малими латинськими літерами) в кожній країні $i = 1,...,n$, причому змінна $s_i$ має двосторонні обмеження:

$$\underline{s}_i \le s_i \le \bar{s}_i . \tag{1}$$

Якщо $d_i$ та $D_i$ – внутрішній попит (demand) на продовольство та непродовольство (в країні $i$) відповідно (змінні, що стосуються непродовольства, позначатимемо великими латинськими літерами), то надлишковий попит на продовольство визначається рівністю

$$z_i = d_i - s_i , \tag{2}$$

а надлишковий попит на непродовольство визначається рівністю

$$Z_i = D_i - S_i , \tag{3}$$

де $S_i$ – внутрішня пропозиція непродовольства в країні $i$, задана виробничими рішеннями попереднього періоду, а тому фіксована в короткостроковому періоді. Загальна сума значень надлишкового попиту (які можуть бути від'ємними) є нульовою за ринкової рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} Z_i . \tag{4}$$

Припустимо, що екзогенно задається реальний торговий дефіцит

$$K_i = r\, z_i + Z_i ,\; i = 1,...,n , \tag{5}$$

виражений через непродовольство, де $r = \dfrac{p}{P}$ – відношення (ratio) ціни (price) $p$ продовольства до ціни $P$ непродовольства. Враховуючи рівняння (4), маємо

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = r \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 .$$

Крім того, рівність (5) означає

$$0 < \frac{p}{P} = r = \frac{K_i - Z_i}{z_i} = \frac{K_i - (D_i - S_i)}{z_i} ,$$

звідки випливає обмеженість зверху надлишкового попиту $Z_i$:

$$K_i > D_i - S_i \geq D_i^0 - S_i \quad \text{при} \quad z_i > 0, \tag{6}$$

де $0 < D_i^0$ – мінімальний попит на непродовольство (який має задовольнятися незалежно від цін і доходів). Аналогічно

$$K_i > d_i - s_i \geq d_i^0 - s_i \quad \text{при} \quad Z_i > 0, \tag{7}$$

де $0 < d_i^0$ – мінімальний попит на продовольство.

Національний (загальний) доход (yield) країни $i$ визначається

$$Y_i = p s_i + P S_i, \; i = 1,...,n, \tag{8}$$

а національні видатки (expenditures) задаються

$$E_i = p d_i + P D_i . \, i = 1,...,n. \tag{9}$$

Тоді в силу рівностей (2), (3), (5) маємо

$$E_i - Y_i = p(d_i - s_i) + P(D_i - S_i) = p z_i + P Z_i = P\left(\frac{p}{P} z_i + Z_i\right) = P K_i. \tag{10}$$

Подібно до монетарної теорії міжнародної торгівлі, торгові дефіцити $z_i$ та $Z_i$ визначаються ендогенно за допомогою функцій національних видатків $E_i$, $i = 1,...,n$. З рівняння (9) маємо

$$\begin{aligned} p d_i + P D_i &= \alpha_i E_i + (1-\alpha_i) E_i + p d_i^0 + P D_i^0 - p d_i^0 - P D_i^0 = \\ &= \alpha_i E_i + (1-\alpha_i) E_i + d_i^0 p + D_i^0 P - \alpha_i d_i^0 p - (1-\alpha_i) d_i^0 p - \\ &\quad - \alpha_i D_i^0 P - (1-\alpha_i) D_i^0 P, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\alpha_i \in (0,1)$ – деякий фіксований коефіцієнт, $i = 1,...,n.$ Незалежно від досягнення рівноваги, рівняння (11), нерівності (6) і (7) є сумісними з рівностями

$$d_i p = d_i^0 p + \alpha_i (E_i - d_i^0 p - D_i^0 P), \tag{12}$$

$$D_i P = D_i^0 P + (1-\alpha_i)(E_i - d_i^0 p - D_i^0 P). \tag{13}$$

Припустимо, що частку фермерських (farm) доходів $F_i$ у національному доході кожної країни захищає параметр $f_i \in (0,1)$ стратегії паритетності

$$F_i = f_i Y_i, \; i = 1,...,n. \tag{14}$$

Для аналізу в короткостроковому періоді рівняння (14) є обмеженнями на урядові стратегії, ніж наслідками політичних рішень: для виконання цих обмежень уряди можуть застосовувати різні засоби – прямі субсидії споживачам, непрямі субсидії вітчизняним виробникам для підтримки цін, квоти тощо. Урядові видатки мають покривати різницю $(s_i p - F_i)$ між ціною виробленого вітчизняного продовольства та фермерським доходом. Припустимо, кожний уряд мінімізує витрати на сільськогосподарську політику, що рівносильно максимізації виручки від такої політики. Оскільки функції (8), (9) національного доходу і національних видатків є однорідними ступеня 0 за цінами, то уряд максимізуватиме реальну виручку, виражену через непродовольство,

$$H_i = \frac{s_i p - F_i}{P} = \frac{s_i p - f_i Y_i}{P}. \tag{15}$$

При $H_i > 0$ для деякої країни $i$ виграш за рахунок сільськогосподарської політики використовується для фінансування урядових видатків на інші потреби, що дозволяє обмежувати оподаткування фермерських доходів $F_i$, захищаючи фермерські інтереси.

Ігрова ситуація у тому, що кожний гравець $i = 1,...,n$ максимізує свою цільову функцію (15), обираючи значення $s_i$ своєї стратегії за обмежень (1). Кожному вектору $\vec{s} = (s_1,...,s_n)$ відповідають рівноважні ринкові відношення $r = \frac{p}{P}$, обсяги $d_i$ та $D_i$ попиту, реальний національний доход $\frac{Y_i}{P}$, урядовий виграш $H_i(\vec{s})$, $i = 1,...,n$. Покажемо, що ця гра у нормальній формі має однозначно визначену рівновагу (equilibrium) $\vec{s}^e = (s_1^e,...,s_n^e)$ у чистих стратегіях за прийнятних умов для $s_i$ та $d_i^0$, $i = 1,...,n$.

З рівностей (12) і (13) випливає відношення

$$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \frac{p(d_i - d_i^0)}{P(D_i - D_i^0)} = r\frac{d_i - d_i^0}{D_i - D_i^0},\ i = 1,...,n. \tag{16}$$

З рівнянь (2), (3), (5) маємо залежності

$$K_i = r z_i + Z_i = r(d_i - s_i) + D_i - S_i, \qquad D_i - D_i^0 = K_i + S_i - r(d_i - s_i) - D_i^0,$$

що використаємо в рівності (16):

$$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \frac{r(d_i - d_i^0)}{K_i + S_i - r(d_i - s_i) - D_i^0},,$$

$$(1-\alpha_i)(d_i - d_i^0)r = \alpha_i(K_i + S_i - D_i^0) - \alpha_i(d_i - s_i)r,,$$

$$\alpha_i(K_i + S_i - D_i^0) = (d_i - d_i^0 - \alpha_i d_i + \alpha_i d_i^0 + \alpha_i d_i - \alpha_i s_i)r =$$

$$= (d_i - d_i^0 + \alpha_i d_i^0 - \alpha_i s_i)r = [s_i + z_i - d_i^0(1-\alpha_i) - \alpha_i s_i]r =$$

$$= [s_i(1-\alpha_i) + z_i - d_i^0(1-\alpha_i)]r,\ i = 1,...,n.$$

Звідси, враховуючи рівність (4), знаходимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(K_i + S_i - D_i^0) = r\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)(s_i - d_i^0), \tag{17}$$

яка є додатною у силу нерівності (6). Отже, значення $r$ є додатним.

У залежності (17) збільшення $s_i$ веде до зменшення $r$ (за інших рівних умов) в силу нерівності $1-\alpha_i > 0$. Якщо $\alpha_i \equiv \alpha,\ i=1,...,n$, то в силу рівності (5) замість (17) маємо

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}(S_i - D_i^0) = r(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}(s_i - d_i^0),$$

тобто $r$ не залежить від $K_i,\ i=1,...,n.$ У загальному випадку величина $r$ залежить від розподілу $K_i$ та $\alpha_i,\ i=1,...,n.$

З рівнянь (8) – (10) випливає

$$PK_i = E_i - Y_i = p\,d_i + P\,D_i - p\,s_i - P\,S_i, \qquad K_i = r\,d_i + D_i - r\,s_i - S_i,$$

звідки в силу нерівностей (6) і (7) маємо

$$K_i + r\,s_i + S_i = r\,d_i + D_i \geq r\,d_i^0 + D_i^0.$$

Оскільки з рівності (8) випливає

$$\frac{Y_i}{P} = \frac{p\,s_i}{P} + \frac{P\,S_i}{P} = r\,s_i + S_i,$$

то цільову функцію (15) можна переписати як

$$H_i(s_i, S_i) = \frac{s_i p - f_i Y_i}{P} = s_i r - f_i(s_i r + S_i) = (1-f_i)s_i r - f_i S_i. \quad (18)$$

Вважаючи міжнародну торгівлю деякою некооперативною грою у нормальній формі, застосуємо для пошуку її рішення поняття рівноваги Неша (Nash) $s^N = (s_1^N,...,s_n^N)$ у чистих стратегіях при обмеженнях (1):

$$H_i(s^N) \geq H_i(s_1^N,...,s_{i-1}^N, s_i, s_{i+1}^N,...,s_n^N)\ \ \forall\ \ s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i],\ i=1,...,n.$$

Покажемо, що за прийнятних припущень ця модель має єдину рівновагу $s^N = [\bar{s}_1,...,\bar{s}_n]$. Більше того, вибір кожною країною $i$ максимальної пропозиції $\bar{s}_i$ є її домінантною стратегією – найкращою відповіддю на будь-які дії решти країн. Зазначеними припущеннями є

$$\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(1-\alpha_j)\underline{s}_j > \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)d_j^0,\ \ i=1,...,n. \quad (19)$$

Для інтерпретації цих припущень скористаємося випадком $\alpha_j \equiv \alpha$:

$$\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\underline{s}_j > \sum_{j=1}^{n}d_j^0,\ \ i=1,...,n,$$

тобто мінімального виробництва будь-яких $(n-1)$ країн достатньо для покриття мінімального попиту всіх $n$ країн. Оскільки тоді мінімальний попит слід вважати малим порівняно з мінімальною пропозицією, що видається прийнятним.

Очевидно, для різних, але достатньо близьких значень $\alpha_j$ припущення (19) має подібну інтерпретацію.

**Теорема 1.** За умови (19) дана ігрова модель має єдину рівновагу Неша $s^N = (\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n)$ у чистих стратегіях, причому стратегія $s_i = \bar{s}_i$ – домінантна для кожного гравця $i = 1, ..., n$:

$$H_i(s_1, ..., s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, ..., s_n) > H_i(s) \;\; \forall \;\; s = (s_1, ..., s_n), \; s_i \neq \bar{s}_i .$$

*Доведення.* Коли $\dfrac{\partial H_i(s)}{\partial s_i} > 0 \;\; \forall \;\; s = (s_1, ..., s_n)$, $s_i \neq \bar{s}_i$, то стратегія $s_i = \bar{s}_i$ є домінантною. Якщо $f_i$, $S_i$ не залежать від $s_i$, то з рівності (18) маємо

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial H_i(s)}{\partial s_i}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial s_i r}{\partial s_i}\right),$$

де в силу рівності (17) отримуємо

$$r = \frac{\mu}{\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma} \tag{20}$$

при

$$\mu = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(K_j + S_j - D_j^0), \qquad \gamma = \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)d_j^0.$$

Звідси

$$s_i r = \frac{s_i \mu}{\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma}, \qquad \frac{\partial (s_i r)}{\partial s_i} = \frac{\mu\left[\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma\right] - s_i\mu(1-\alpha_i)}{\left[\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma\right]^2},$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial s_i r}{\partial s_i}\right) = \operatorname{sign}\left[\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma - s_i(1-\alpha_i)\right] = \operatorname{sign}\left[\sum_{j=1, j\neq i}^{n}(1-\alpha_j)s_j - \gamma\right].$$

Підзнаковий вираз завжди додатний в силу умови (19), що завершує доведення.

Загалом $\operatorname{sign}\left(\dfrac{\partial H_i(s)}{\partial s_i}\right)$ не залежить від $s_i$. Якщо гравець $i$ у точці рівноваги має стратегію $s_i^N \in (\underline{s}_i, \bar{s}_i)$, то в цій точці $\dfrac{\partial H_i(s)}{\partial s_i} = 0$, тобто $H_i(s_1^N, ..., s_{i-1}^N, s_i, s_{i+1}^N, ..., s_n^N)$ не залежить від $s_i = s_i^N$. Тому така рівновага має бути нестійкою, що означає вибір кожним гравцем $i$ стратегії $s_i = \bar{s}_i$ чи $s_i = \underline{s}_i$.

Отже, при умові (19) реальна виручка $s_i r$ країни $i$ від продажу продовольства – зростаюча функція за $s_i$, коли пропозиція продовольства решти країн – фіксована: попит на пропозицію продовольства країни $i$ є еластичним. Проте виручка від продажу $\hat{s} = \sum_{j=1}^{n} s_j$ продовольства всього ринку не зростаюча функція за $\hat{s}$: в силу рівності (20) при $\alpha_j \equiv \alpha$ виручка ринку становить

$$\hat{s}\, r = \frac{\hat{s}\,\mu}{\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)\, s_j - \gamma} = \frac{\hat{s}\,\mu}{(1-\alpha)\,\hat{s}-\gamma},$$

звідки

$$\frac{\partial(\hat{s}\, r)}{\partial \hat{s}} = \frac{\mu[(1-\alpha)\,\hat{s}-\gamma]-(1-\alpha)\,\hat{s}\,\mu}{[(1-\alpha)\,\hat{s}-\gamma]^2} = -\frac{\mu\gamma}{[(1-\alpha)\,\hat{s}-\gamma]^2} < 0.$$

Щоб узагальнити модель взаємозв'язків, введемо для країни $i$ буферний (buffer) запас $B_i$ продовольства, внутрішню ціну $q_i = g_i p_i$ і $p_i = a_i p$ виробників та споживачів продовольства відповідно, внутрішню ціну $Q_i = G_i P_i$ і $P_i = A_i P$ виробників та споживачів непродовольства відповідно, де $a_i$, $A_i$, $g_i$, $G_i$ – додатні стратегічні параметри з двосторонніми обмеженнями. Причинами цінових відмінностей можуть бути пропорційні тарифи, пропорційні непрямі податки, субсидії тощо. Крім того, уряд може контролювати внутрішні ціни. При заданих стратегіях інших країн кожна держава $i = 1,...,n$ має достатньо важелів для досягнення своїх цілей. Ринкова рівновага залежить від способу урядового втручання: вплив заданих внутрішніх цін інших країн на експорт та імпорт кожної держави $i = 1,...,n$ відрізняється від впливу заданих тарифів інших країн. Якщо відмінності внутрішніх і світових цін спричинені тарифами, то відповідна світова ринкова рівновага відрізняється від рівноваги, що відповідає рівновазі при відмінностях внутрішніх і світових цін, спричинених безпосереднім регулюванням цін державами. Таким чином, для регулювання важливими є інституції. Хоча можуть існувати оптимальні значення параметрів $a_i$, $A_i$, $g_i$, $G_i$, припустимо, що вони є заданими екзогенно.

Крім обсягу $s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i]$ продажу продовольства, нехай стратегією також є зміна $b_i$ буферного запасу продовольства країни $i$:

$$0 \le B_i + b_i \le \overline{B}_i,\ i = 1,...,n,$$

де $\overline{B}_i$ – місткість країни $i$ для зберігання продовольства. Тоді обсяг продажу продовольства має враховувати не лише мінімальний попит, але й цю місткість:

$$\underline{s}_i > d_i^0 + \overline{B}_i, \ i = 1,...,n.$$

Моделювання реалістичної поведінки на світовому ринку потребує досить складних засобів і методів [9, 10].

*В.М. Горбачук, А.Г. Шулинок, С.-Б. Сулейманов*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ НА МИРОВОМ РЫНКЕ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ

На примере простейшей модели взаимосвязей на мировом рынке продовольственных и непродовольственных продуктов показано, что некооперативное равновесие достигается при максимальных объемах экспорта продовольствия.

*V.M. Gorbachuk, A.G. Shulinok, S.-B. Suleimanov*

THE MODELING OF LINKAGES ON THE WORLD FOOD MARKET

The simplest linkage model of world market for food and non-food products shows that a non-cooperative equilibrim is achieved at the maximal volumes of food export.

**Список літератури**

1. Rabar F. Local problems in a global system. *Food and Agriculture Program's Newsletter*. 1979. P. 3.
2. Parikh K.S. A framework for an agricultural policy model for India. Laxenburg, Austria: IIASA, 1977. RM-77-59.
3. Csaki C. Second version of the Hungarian Agricultural Model. Laxenburg, Austria: IIASA, 1979. WP-79-71.
4. Keyzer M.A. An outline of IIASA's Food and Agriculture Model. Laxenburg, Austria: IIASA, 1980. WP-80-9.
5. Fischer G., Frohberg K. Simplified national models. Laxenburg, Austria: IIASA, 1980. WP-80-56.
6. Goth W., Selten R. Strategic aspects of IIASA's Food and Agriculture Model. Laxenburg, Austria: IIASA, 1981. WP-81-9. 20 p.
7. Горбачук В.М. Методы реализации системы взаимосвязанных аграрных моделей стран мира (BLS). *Моделирование плановых расчетов и диалоговая оптмизация*. К.: Знание, 1990. С. 35 – 36.
8. Горбачук В.М., Лещенко Л.Л. Методы интеграции экономических моделей государств в компьютерную систему BLS взаимосвязанных аграрных моделей стран мира. *Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях.* К.: Знание, 1991. С. 91.
9. Горбачук В.М. Линейные модели торговли. *Моделирование и оптимизация*. К.: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 1991. С. 3 – 8.
10. Єрмольєв Ю.М., Гайворонський О.О., Горбачук В.М., Єрмольєва Т.Ю., Кнопов П.С. Моделювання еколого-економічних взаємозалежностей на державному, міждержавному та глобальному рівнях. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку.* К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2017. С. 61 – 63.

Одержано 27.03.2018