УДК 519.85

П.И. СТЕЦЮК, В.А. СТОВБА, А.А. ЖМУД

МЕТОД ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СЛАУ

Описана задача минимизации выпуклой функции для нахождения L_p-решения переопределенной си-стемы линейных уравнений при $p \geq 1$ и ее частный случай при $1 \leq p \leq 2$. Описана общая схема метода эллипсоидов и ее применение для решения выпуклых задач. Приведены результаты вычислительных экспериментов для определения параметров линейной регрессии при наличии ошибочных измерений.

Введение. Задача нахождения решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) может быть сведена к задаче минимизации выпуклой функции для отыскания вектора, наилучшим образом удовлетворяющему всем уравнениям СЛАУ. При этом выпуклые функции могут быть как гладкими, так и негладкими. Применение субградиентных методов минимизации негладких выпуклых функций позволяет разрабатывать «универсальные» алгоритмы для нахождения решения переопределенных СЛАУ. Эти алгоритмы будут применимы и для плохо обусловленных гладких выпуклых функций и, следовательно, не будут зависеть от того будет ли ранг матрицы СЛАУ полным или неполным.

В статье рассматривается формулировка задачи выпуклого программирования, которая связана с нахождением решения переопределенной СЛАУ, и методы ее решения на основе субградиентных методов минимизации выпуклых функций (r-алгоритм и методы эллипсоидов). В основе оптимизационной задачи стоит способ отыскания вектора неизвестных, минимизирующего L_p-норму вектора невязки СЛАУ.

Замечательной чертой метода эллипсоидов является то, что его скорость сходимости зависит только от размерности пространства переменных. Здесь приведено описание общей схемы метода эллипсоидов и обсуждаются два его варианта – классический метод эллипсоидов Юдина – Немировского – Шора и приближенный метод эллипсоидов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим такую задачу: имеется СЛАУ:

$$Ax \approx b \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \approx b_i, \; i = 1,..,m. \tag{1}$$

Здесь $A \in R^{m \times n}$ – матрица, $b \in R^m$ и $x \in R^n$ – вектор правых частей и неизвестных соответственно. Задача состоит в том, чтобы найти такой вектор $x_p^* \in R^n$, который минимизирует L_p-норму вектора $y = Ax - b = (y_1, \ldots, y_m)^T \in R^m$. Здесь вектор y – это вектор невязок для системы (1).

Задача нахождения «наилучшей» L_p-нормы вектора невязок для системы (1) соответствует задаче минимизации выпуклой функции: требуется найти

$$x_p^* = \arg\min_{x \in R^n} \left\{ f_p(x) = \|Ax - b\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p} \right\}, \tag{2}$$

где $p \in R$ – скалярный параметр такой, что $p \geq 1$. Здесь $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$, $i = 1,..,m,$ а условие $p \geq 1$ обеспечивает выпуклость негладкой функции $f_p(x)$. Задача (2) всегда имеет решение. Если $m > n$, то система линейных уравнений является переопределенной, и если для нее ранг матрицы A равен n, то задача (2) имеет единственное решение. В общем случае решение задачи (2) не обязательно будет единственным. В этом случае точка x_p^* – одна из точек множества оптимальных решений, которому соответствует минимальное значение функции f_p^* в задаче (2).

Хорошо известны три частные случаи наилучшей L_p-нормы вектора невязок для системы (1). Так, при $p = 1$ получаем L_1-норму $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |y_i|$, которую еще называют «манхеттеновской»; при $p = 2$ – евклидову L_2-норму $\|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}$ и, впрочем, чебышевскую L_∞-норму $\|y\|_\infty = \max_{i=1,..,m} |y_i|$ – при $p = \infty.$ Каждому приведенному значению параметра p соответствует свой метод решения задачи (2). Метод наименьших модулей (МНМ) соответствует $p = 1,$ метод наименьших квадратов (МНК) соответствует $p = 2$, а минимаксный (чебышевский) метод соответствует $p = \infty$.

Для решения задачи (2) можно использовать методы минимизации негладких выпуклых функций. Так, например, на основе модификации r-алгоритма разработана программа **linrp** [1]. На основе метода эллипсоидов разработаны алгоритмы и их программные реализации для нахождения точки минимума $f_p(x)$ при двухсторонних ограничениях на переменные [2].

Для значений $1 \le p \le 2$ задачу (2) можно упростить. Этой задаче соответствует задача минимизации выпуклой функции: найти

$$x_p^* = \arg\min_{x \in R^n} \left\{ F_p(x) = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right|^p \right\}, \tag{3}$$

где $p \in R$ – скалярный параметр, такой что $1 \le p \le 2$. Здесь $F_p(x)$ – выпуклая функция, которая является негладкой только при $p = 1$. Если $p = 1$, то задача (3) сводится к решению задачи линейного программирования и соответствует МНМ. Если $p = 2$, то задача (3) состоит в минимизации квадратичной функции и соответствует МНК. При этом оптимальные значения функций в задачах (2) и (3) связаны соотношением $F_2^*(x_2^*) = \left(f_2^*(x_2^*) \right)^2$.

Задачи вида (2) и (3) часто встречаются при обработке результатов наблюдений, построении и анализе различного рода моделей (физических, биологических, экономических, социальных и других), при поиске компромиссных решений в моделях с противоречивыми данными и т. д. Для них можно находить наилучшие параметры линейной регрессии не только с помощью классических методов МНК и МНМ, но и других методов, которым соответствуют значения параметра p, отличные от $p = 1$ и $p = 2$.

2. Общая схема метода эллипсоидов. Обобщенный метод эллипсоидов [3] является алгоритмом с растяжением пространства, где коэффициент растяжения α удовлетворяет неравенству

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}, \tag{4}$$

и предназначен для решения следующей задачи.

Задача. На $R^n (n \ge 2)$ задано векторное поле $g(x)$, $g(x) \in R^n$. Требуется найти точку x^*, такую, что $(g(x), x - x^*) \ge 0$ для всех $x \in E^n$. Предполагается, что x^* существует и $g(x) \ne 0$ для $x \ne x^*$.

Общая схема метода эллипсоидов имеет такой вид.

Инициализация. Выбираем точку $x_0 \in R^n$ и радиус r_0 такими, чтобы $\left\| B_0^{-1}(x_0 - x^*) \right\| \le r_0$, где B_0 – $n \times n$-матрица. Перейдем к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in R^n$, r_k и $n \times n$-матрица B_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполняем такие действия.

Шаг 1. Вычислим $g_k = g(x_k)$. Если $g_k = 0$, то ОСТАНОВ ($x^* = x_k$).

Шаг 2. Вычислим очередную точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k,\ \text{где}\ h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k,\ \xi_k = \frac{B_k^T g_k}{\left\| B_k^T g_k \right\|}.$$

Шаг 3. Пересчитаем матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

$$B_{k+1} := B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(B_k \xi_k\right)\xi_k^T, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k.$$

Шаг 4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

Теорема. Генерируемая обобщенным методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| A_k (x_k - x^*) \right\| \le r_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{5}$$

где $A_k = B_k^{-1}$. Если α удовлетворяет неравенству (4), то отношение объемов эллипсоидов $E_k = \left\{ x : \left\| A_k (x_k - x) \right\| \le r_k \right\}$ и $E_{k+1} = \left\{ x : \left\| A_{k+1} (x_{k+1} - x) \right\| \le r_{k+1} \right\}$, локализующих точку x^*, есть величина постоянная и равна

$$q_n(\alpha) = \frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{6}$$

В теореме соотношения (5) и (6) означают, что метод эллипсоидов сходится (по объему локализации точки x^*) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q_n(\alpha) < 1$. Величина знаменателя зависит от выбранного значения α, удовлетворяющего неравенству (4). Наименьший знаменатель прогрессии реализуется в методе эллипсоидов Юдина – Немировского – Шора [4, 5]. Ему соответствует коэффициент растяжения $\alpha_1 = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ и достигается он в точке минимума функции $q_n(\alpha)$ по α. Близкий к наименьшему знаменатель прогрессии реализуется в приближенном методе эллипсоидов [6], и ему соответствует коэффициент растяжения $\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}$. Он достигается в точке минимума функции $Q_n(\alpha)$, которая аппроксимирует сверху функцию $q_n(\alpha)$ согласно следующему соотношению:

$$q_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2\right)\right)^n \le \frac{1}{\alpha}\exp\left\{\frac{n}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2\right)\right\} = Q_n(\alpha).$$

При больших значениях n знаменатели геометрической прогрессии в обоих методах аппроксимируются сверху близкими величинами $q^*(n) = 1 - 1/2n$ и $Q^*(n) = 1 - 1/2n + 1/2n^2$.

3. Выпуклые задачи и метод эллипсоидов. Далее приведем описание двух выпуклых задач, для решения которых можно использовать метод эллипсоидов.

1. Задача безусловной минимизации выпуклой функции. Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, где $x \in R^n$. Ее минимальное значение будем обозначать $f^* = f(x^*)$ и, не ограничивая общности, будем предполагать, что точка x^* – единственная точка минимума. Пусть имеется априорная информация, что точка x^* находится в шаре $S(x_0, r) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \le r\}$. Тогда для векторного поля $g(x) = g_f(x)$, где $g_f(x)$ – субградиент функции $f(x)$ в точке x, выполняется неравенство

$$\left(x - x^*, g(x)\right) = \left(x - x^*, g_f(x)\right) \ge f(x) - f(x^*) = f(x) - f^* \ge 0, \quad \forall x \in R^n. \qquad (7)$$

Следовательно, для нахождения точки x^* можно использовать метод эллипсоидов, установив стартовую точку x_0, начальный радиус $r_0 = r$ и матрицу $B_0 = I_n$, где I_n – единичная $n \times n$-матрица. В качестве критерия останова можно использовать условие $r_k \left\|B_k^T g_f(x_k)\right\| \le \varepsilon$, которое при сколь угодно малом ε позволяет найти точку $x_\varepsilon^* = x_k$, для которой $f(x_\varepsilon^*) - f^* \le \varepsilon$. Это следует из того, что справедливо неравенство

$$r_k \ge \left\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\right\| \ge \left(B_k^{-1}(x_k - x^*), \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\left\|B_k^T g_f(x_k)\right\|}\right) = \frac{(x_k - x^*, g_f(x_k))}{\left\|B_k^T g_f(x_k)\right\|} \ge \frac{f(x_k) - f^*}{\left\|B_k^T g_f(x_k)\right\|},$$

которое имеет место для выпуклой функции $f(x)$ с учетом неравенства (7).

2. Общая задача выпуклого программирования. Найти

$$f_0^* = f_0(x^*) = \min_{x \in R^n} f_0(x) \qquad (8)$$

при ограничениях

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (9)$$

где $f_i(x)$ – выпуклые функции, определенные на R^n, $g_i(x)$ – соответствующие субградиенты, $i = 0, 1, \ldots, m$. Пусть известно, что оптимальная точка x^* существует и находится в шаре $S(x_0, r)$ (формально к системе ограничений (9) можно добавить ограничение $\|x - x_0\| \le r$), и для задачи (8), (9) выполнено условие Слейтера.

Рассмотрим векторное поле $g(x)$, построенное следующим образом:

$$g(x)=\begin{cases} g_0(x), & \text{если } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0, \\ g_{i^*}(x), & \text{если } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)=f_{i^*}(x)>0. \end{cases} \tag{10}$$

Покажем, что $(g(x),x-x^*)\ge 0$ при всех $x\in R^n$. Если $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0$, то $g(x)=g_0(x)$, и соответсвенно имеем

$$(g(x),x-x^*)=(g_0(x),x-x^*)\ge f_0(x)-f_0(x^*)\ge 0. \tag{11}$$

Если $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)>0$, то $g(x)=g_{i^*}(x)$, причем $f_{i^*}(x)>0$, $f_{i^*}(x^*)\le 0$, тогда имеем

$$(g(x),x-x^*)=(g_{i^*}(x),x-x^*)\ge f_{i^*}(x)-f_{i^*}(x^*)\ge 0\,. \tag{12}$$

Таким образом из (11), (12) следует справедливость неравенства $(g(x),x-x^*)\ge 0$ при всех $x\in R^n$.

Следовательно, вычисляя $g(x)$ по формуле (10), для локализации оптимальной точки x^* в задаче (8), (9) можно использовать обобщенный метод эллипсоидов. Отметим, что этот результат не изменится, если во второй формуле (10) вместо $g_{i^*}(x)$ взять $g_{\bar{i}}$, где $\bar{i}$ – произвольный индекс, для которого $f_{\bar{i}}(x)>0$. Останов по условию $r_k\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|\le \varepsilon$ позволяет найти точку $x_\varepsilon^*=x_k$, для которой $f_0(x_\varepsilon^*)-f_0^*\le\varepsilon$, что следует из справедливости неравенства

$$r_k\ge\left\|B_k^{-1}(x_k-x^*)\right\|\ge\left(B_k^{-1}(x_k-x^*),\frac{B_k^T g_0(x_k)}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}\right)=\frac{(x_k-x^*,g_0(x_k))}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}\ge\frac{f_0(x_k)-f_0^*}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}$$

для выпуклой функции $f_0(x)$. Останов по условию $r_k\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|\le\varepsilon$ используется в программной реализации алгоритма на основе классического метода эллипсоидов Юдина – Немировского – Шора [2].

4. Ошибочные измерения и МНМ. Рассмотрим пример задачи определения параметров линейной регрессии [7, с. 10] для функции одной переменной. Результаты наблюдений (x_i,y_i), среди которых имеется одно ошибочное измерение (5,0), показаны на рис. 1. Их требуется аппроксимировать линейной функцией $y=cx+d$, где c и d – неизвестные.

x_i	y_i
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	0

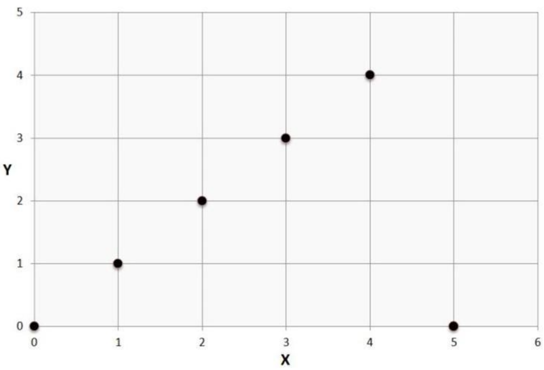

РИС. 1. Результаты наблюдений [7, с. 10] для функции одной переменной

В работе [7] показано, что метод наименьших модулей является более предпочтительным, поскольку игнорирует ошибочное измерение (5,0) и точно восстанавливает линейную функцию $y = x$. Задачу определения наилучших параметров линейной функции $y = cx + d$ можно сформулировать как задачу вида (2). Она будет иметь такой вид: найти

$$(c_p^*, d_p^*) = \arg\min_{c,d} \left\{ f_p(c,d) = \begin{pmatrix} |d|^p + |c+d-1|^p + |2c+d-2|^p + \\ + |3c+d-3|^p + |4c+d-4|^p + |5c+d|^p \end{pmatrix}^{1/p} \right\}. \quad (13)$$

Для различных значений $1 \le p \le 2$ результаты решения задачи (13) с помощью алгоритма на основе метода эллипсоидов [2] приведены в табл. 1. Значению параметра $p = 1$ соответствует МНМ, а значению $p = 2$ – МНК.

ТАБЛИЦА 1. Результаты решения задачи (13) алгоритмом [2] при различных p

p	itn	$\tilde{c}_p^*$	$\tilde{d}_p^*$	$f_p(\tilde{c}_p^*, \tilde{d}_p^*)$
1	200	1.0000	3.4408e-012	5.0000
1.05	174	0.99990	3.5115e-005	4.9999
1.1	138	0.99065	9.3409e-003	4.9965
1.2	119	0.86343	1.3768e-001	4.9047
1.3	111	0.70080	3.1609e-001	4.6989
1.4	107	0.57606	4.7512e-001	4.4615
2	104	0.28571	9.5238e-001	3.4503

Здесь параметр p пробегает значения от 1 до 1.4 с шагом 0.1 и с шагом 0.05 от 1 до 1.1; itn – количество итераций, затраченных на нахождение оптимальных параметров $\tilde{c}_p^*$ и $\tilde{d}_p^*$ с точностью $f_p(\tilde{c}_p^*, \tilde{d}_p^*) - f_p(c_p^*, d_p^*) \le 10^{-12}$. Использовались: стартовая точка (0,0) и радиус локализации $r = 3$. Из табл. 1 видно, что при $p=1$ измерение (5,0) игнорируется и получаем линейную функцию $y=x$, при очень близких к единице значениях параметра p влияние ошибочного измерения мало чувствуется, но при $p=1.3$ и $p=1.4$ его влияние очень сильное (графически это показано на рис. 2).

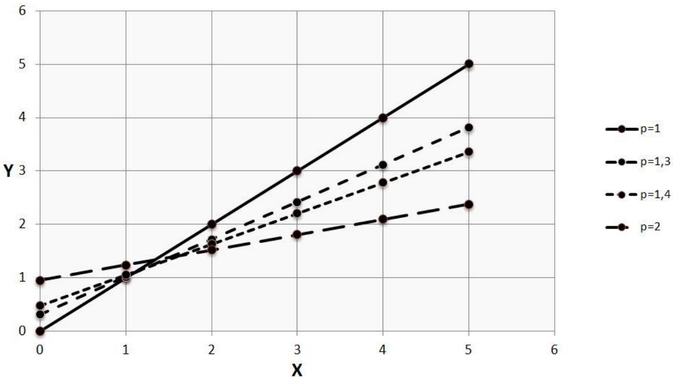

РИС. 2. Наилучшие линейные функции $y=c_p^* x+d_p^*$ при $p\in[1;1.3;1.4;2]$

Следовательно, использование алгоритма на основе метода эллипсоидов [2] в каждом конкретном случае позволяет подбирать параметр p так, чтобы отбрасывать или оставлять «ошибочные» измерения в случае их состоятельности.

Рассмотрим пример аппроксимации результатов наблюдений из анкеты опроса [2]. Имеется 28 векторных наблюдений (u_i, f_i), $u_i\in R^4$, $f_i\in R$, которые необходимо «наилучшим образом» приблизить квадратичной функцией вида $Q(u)=u^T Au+b^T u+c$, где $u\in R^4$, A – симметрическая 4×4-матрица, $b\in R^4$, $c\in R$. Эта задача сводится к оптимизационной задаче (3) от 15 переменных. При этом значению параметра $p=1$ соответствует МНМ, а значению $p=2$ – МНК. Сравнение результатов работы МНМ и МНК приведено в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Сравнение МНМ и МНК для наилучших квадратических функций

i	u_i^T	f_i	Q_i^1	$f_i-Q_i^1$	Q_i^2	$f_i-Q_i^2$
3	(1.5, 8.5, 2.5, 5.2)	0.5	0.501	-0.001	0.506	-0.006
4	(1.5, 8.5, 2.5, 5.2)	0.5	0.501	-0.001	0.506	-0.006
7	(2.0, 8.5, 2.0, 5.2)	0.5	0.501	-0.001	0.505	-0.005
13	(4.0, 7.9, 5.4, 8.6)	0.9	0.896	0.004	0.881	0.019
20	(5.9, 7.7, 4.7, 6.4)	1.0	0.995	0.005	0.988	0.012
22	(2.0, 9.0, 2.2, 7.0)	0.9	0.897	0.003	0.886	0.014
24	(1.1, 9.0, 3.1, 7.0)	0.9	0.895	0.005	0.878	0.022
25	(1.1, 9.0, 2.2, 7.9)	0.9	0.899	0.001	0.889	0.011
26	(2.0, 8.1, 3.1, 7.9)	0.9	0.974	-0.074	0.918	-0.018
27	(2.0, 8.1, 3.1, 7.9)	0.9	0.974	-0.074	0.918	-0.018

Здесь второй и третий столбцы содержат наблюдения, четвертый и шестой – значения функций, полученных с помощью МНМ и МНК. Пятый и седьмой столбцы отражают отклонения заданных значений (третий столбец) от значений полученных с помощью аппроксимирующих функций. В таблице представлены лишь те наблюдения, для которых отклонение в пятом столбце не равно нулю. Из табл. 2 видно, что если наблюдения 26 и 27 не учитывать, то использование МНМ предпочтительнее, чем МНК.

Выводы. Метод элипсоидов можно успешно применять для нахождения приближений к решению переопределенной СЛАУ при небольшом количестве переменных в задачах (3) и (4). Чтобы при $n = 10$ найти приближение к решению с относительной точностью по значению функции, равной 10^{-10}, методу эллипсоидов Юдина – Немировского – Шора достаточно осуществить 4600 итераций. При $m = 1000$ для современных персональных компьютеров это требует меньше секунды процессорного времени. Поэтому с помощью метода эллипсоидов задачи нахождения приближений переопределенной СЛАУ при $n = 10$ и $m = 1000$ можно решать в реальном времени на современных компьютерах. При этом алгоритмы будут устойчивыми при решении плохо обусловленных СЛАУ.

Работа выполнена при поддержке НАН Украины, проекты № 0117U000327 и № 0116U004558.

П.І. Стецюк, В.О. Стовба, О.О. Жмуд

МЕТОД ЕЛІПСОЇДІВ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРЕВИЗНАЧЕНОЇ СЛАР

Описана задача мінімізації опуклої функції для знаходження L_p-розв'язку перевизначеної системи лінійних рівнянь при $p \geq 1$ та її частинний випадок при $1 \leq p \leq 2$. Описана загальна схема методу еліпсоїдів та її застосування для розв'язання опуклих задач. Наведені результати обчислювальних експериментів для визначення параметрів лінійної регресії за наявності аномальних спостережень.

P.I. Stetsyuk, V.A. Stovba, A.A. Zhmud

ELLIPSOID METHOD FOR FINDING SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS SYSTEM

Described is the problem of convex function minimization for finding L_p-solution of redefined linear equations system with $p \geq 1$ and its particular case with $1 \leq p \leq 2$. Given is a general outline of ellipsoid method and its application to solving convex problems. Presented are the results of computational experiments for determination of linear regression parameters in the presence of outliers.

Список литературы

1. Стецюк П.И., Колесник Ю.С. К вопросу выбора метода аппроксимации результатов измерения. *Интеллектуальные информационно-аналитические системы и комплексы*. Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2000. С. 62 – 67.

2. Стецюк П.И., Стовба В.А., Мартынюк И.С. Алгоритм метода эллипсоидов для нахождения L_p-решения системы линейных уравнений. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. 2017. С. 139 – 146.
3. Стецюк П.И. Общая схема метода эллипсоидов. *Информационный бюллетень АМП № 13*. Екатеринбург: УрО РАН, 2015. С. 59 – 60.
4. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Вып. 2. С. 357 – 369.
5. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94 – 95.
6. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141 – 146.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
8. Стецюк П.И., Колесник Ю.С., Лейбович М.М. О робастности метода наименьших модулей. *Компьютерная математика*. 2002. С. 114 – 123.

Получено 18.04.2018